

2.) Celo število:

Motivacija:

Pojem grupe:

Definicija: Grupa $(G, \circ)$ je par sestavljen iz množice G in binarne operacije

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 \circ g_2. \end{aligned}$$

Za operacijo $\circ$ veljajo naslednji aksiomi:

1.) Asociativnost:

Za vsake tri elemente $g_1, g_2, g_3 \in G$ velja:

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$$

2.) Obstoj neutralnega elementa.

To pomni: Istnieje $e \in G$, takie że wtedy:
Za wszelk $g \in G$ wtedy

$$e \circ g = g \circ e = g$$

3.) Zz wszelk $g \in G$ istnieje inversyjny element
 f . To pomni:

$$g \circ f = f \circ g = e$$

Pisano: $f = g^{-1}$

Ati je množica naturalnych sčisl $\mathbb{N}$ grupa
z2 kłkno operacj? :

Postawiamy najpierw 2 operacj $+$. Tę $+$ $\circ$ je
sedy $+$

Nas je

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(m, m) \longmapsto m + m \\ (m \circ m)$$

Ta operacija je asociativna.

$$(m + n) + k = m + (n + k)$$

Ali obstaja nevtralni element?

Očitno: nevtralni element za seštevanje je število 0

$$0 + n = n + 0 = n$$

Torej - če želimo, da bo $(\mathbb{N}, +)$ grupa, moramo dodati element 0.

$$\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Naj bo $m \in \tilde{\mathbb{N}}$ poljubno število. Ali v $\tilde{\mathbb{N}}$ obstaja **inverzni element** za m ?

Obstajati bi moralo število $\hat{n}$, za katero bi veljalo

$$n + \hat{n} = \hat{n} + n = 0$$

↑
neutralni element

Tak $\hat{n}$ v $\mathbb{N}$ ne obstaja.

Torej $(\mathbb{N}, +)$ ni grupa.

Iz $(\tilde{\mathbb{N}}, +)$ lahko naredimo grupo tako, da množici $\tilde{\mathbb{N}}$ dodamo vse inverzne elemente. Torej za vsak n dodamo še $\hat{n}$, za katerega velja:

$$n + \hat{n} = \hat{n} + n = 0$$

Običajna oznaka

$$\hat{n} = -n$$

Pisano:

$$n + \hat{n} = n - n = 0$$

Splôsněj : $m + \hat{m} = m - m$

Ělamenti $\hat{m}$ niso elementi $\tilde{\mathbb{N}}$. Pnev řzko
vřz: Ě j $m > n$, element

$$m + \hat{m} = m - m$$

nř elementi $\tilde{\mathbb{N}}$.

Ě hããmo iz $(\tilde{\mathbb{N}}, +)$ narediti *grupo*,
morzmo dõditi vse elemente $\hat{m} = -m$

Definicej. Mnozicez $\tilde{\mathbb{N}} \cup \{ \hat{m} = -m ; m \in \mathbb{N} \}$
se imenzej *mnozicez celih řterih* $\mathbb{Z}$.

Mnozicez $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Lzllõ přřemo: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-\mathbb{N}\}$

Poslední konstrukcí je zřejmé, že ref:
Množice $\mathbb{Z}$ je grupa.

V množici napsaných šesti dostává se jen standardní operace: množení.

Ali je $\mathbb{N}$ grupa z množení?

1.) Asociativnost:

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$$

2.) Neutrální element:

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$$

$$1 \in \mathbb{N}.$$

3.) Inverzní element: Kóms šleže n ,

za každé refi

$$m \cdot n^{-1} = n^{-1} \cdot m = 1$$

invertibilní
element.

$$n \cdot n \geq n \quad \text{čo je } \forall n > 1,$$

počim n nimam v $\mathbb{N}$
inverza.

Če ho je videti: n tudi v $\mathbb{Z}$ nimam
inverza za množenje. Noben element
iz $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ nimam v $\mathbb{Z}$ inverza
za množenje.

Torej: $\mathbb{Z}$ ni grupa za množenje.

Či bi: iz množice $\mathbb{Z}$ bi radi naredili tako
množico, ki bi $\mathbb{Z}$ vsebovala in bi bila
grupa za množenje.

3. Racionalni števila

Kakor prej, bomo množici $\mathbb{Z}$ dodali vse
inverzne elemente elementov množice $\mathbb{Z}$.

To nam je elementi

$$A = \{ m, \frac{1}{m} ; m \in \mathbb{Z} \}$$

Pišemo: $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$

Res, po našim pravilom pišemo:

$$m \cdot \frac{1}{m} = 1$$

Ali je množica A že grupa? $\neq$ množica?

Grupa je podmnožica: kompozitum *vsekega* para elementov mora biti element grupe

Le imamo: $m, m ; m \neq m :$

$$m \cdot \frac{1}{m} = m \cdot \frac{1}{m} = \frac{m}{m} \quad \text{ni nujno element } A.$$

1. $m \neq 0$

$$A = \{ m, \frac{1}{m} ; m, m \in \mathbb{Z} \}$$

2.) Če m ni deljiv z n , $\frac{n}{m} \notin \mathbb{A}$.

Torej: Če želimo iz $\mathbb{Z}$ generirati grupo za množenje, moramo narediti dvoje:

Izbrati moramo $0 \in \mathbb{Z}$.

Dodati moramo vse produkte oblike:

$$n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$$

$$m = 1, \text{ potem } \frac{1}{m} = 1 \quad \vee \quad n \cdot \frac{1}{m} = n \cdot 1 = n \in \mathbb{N}$$

$$m = 1, \text{ potem } n \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n} \in \mathbb{A}$$

n in m različna od 1 in

$n \nmid m$ (n ne deli m)

$$n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{m} \text{ niso elementi,}$$

ki niso v $\mathbb{A}$.

Dz iz $\mathbb{Z}$ dobimo grupo, moramo dodati vse inverze glede na množenje in vse produkte (kompozitume) celih števil in njihovih inverzov.

Izrēķini par mērķi 0 - nevienādi elementu sistēmā.

Tātad dabiskā mērķa sistēmā:

$$B = \{ m \cdot n = \frac{m}{n} ; m, n \in \mathbb{Z} ; n \neq 0 \}$$

Tātad ir mērķa sistēmā ar elementu

Operācija par rezultātu:

$$\frac{2}{4} \text{ un } \frac{1}{2} \text{ ir dažādi elementi}$$

vēl ir smalkāks $\frac{2}{4}$ un $\frac{1}{2}$ rezultāti, kas
ir tas pats.

Itā kā ir: Elementi $\frac{m_1}{n_1}$ un $\frac{m_2}{n_2}$

prestavietas ir tas pats, kā arī:

$$m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$$

Tātad: V mērķa sistēmā B ir jāņem vērā ekvivalences
relācija:

$$\frac{m_1}{m_1} \sim \frac{m_2}{m_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$$

$$\frac{m_1}{m_1} \text{ je ekvivalenten } \frac{m_2}{m_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$$

Vemo: Ulomki so ekvivalentni, če predstavljata isto število:

$$\frac{m_1}{m_1} = \frac{m_2}{m_2} \cdot \frac{1}{m_1 \cdot m_2}$$

$$\frac{m_1 \cancel{m_1} \cdot m_2}{\cancel{m_1}} = \frac{m_2 \cdot \cancel{m_1} \cdot m_2}{\cancel{m_2}}$$

$$m_1 m_2 = m_2 m_1$$

Sedaj lahko definiramo množico racionalnih števil $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \left[\frac{n}{m} \right] ; n, m \in \mathbb{Z} ; m \neq 0 \right\}$$

Pri tem je

$$\left[\frac{n}{m} \right] = \left\{ \frac{k}{l} \in \mathbb{B} ; \frac{n}{m} \sim \frac{k}{l} \right\}$$

$$\left[\frac{m}{n} \right] = \left\{ \frac{k}{l} \in B ; m \cdot l = n \cdot k \right\}$$

Na $\mathbb{Q}$ velj:

$(\mathbb{Q}, +)$ je grup2 za sešćenje

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je grup2 za množenje.

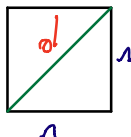
Spannimo se:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}$$

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}$$

Ali su racionalne čleis "dobro volike množenje
stabil2 za razlomljenje"?

Primer



Po Pitagorinu izl2 uzm1:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$

$$d^2 = 2$$

Pieņūnāsi $\sqrt{2}$, ka $\sqrt{2}$ nēks rācionāls skāis.

Ali jē nēs tēks?

Tādēļ: $\sqrt{2}$ nē rācionāls skāis.

Dokz:

Predpostzēmo, ka $\sqrt{2}$ jē rācionāls skāis.

Tēj obstāzē nāzēni skāi $p, q \in \mathbb{N}$ ē:
tēks, dz jē

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Izvēnāmo: Vēsmē $\frac{p}{q}$ jē dēvāzēns.

Spmēnā ē: Vēks nāzēns skāis lāts nē
ēnolācēn nācēn rēpēsmē kōt pōdēnēt sāmēn

prześledź.

Wykaż:

$$p = p_1 p_2 p_3 \dots p_k$$

p_i - pierwsze:

$$Wz. wst.: p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots \leq p_k$$

Imponuj: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ sledzi

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2 \cdot q^2 \quad *$$

$$p^2 = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_k) (p_1 \cdot p_2 \dots p_k) =$$

$$= p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_3 \dots p_k \cdot p_k$$

Iz wyrazu (*) sledzi:

$$p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdots p_k \cdot p_k = 2 \cdot q^2$$

To pomeni $p_1 = 2$

Tudi števil q lahko razstavimo na prafaktorje.

$$q = q_1 \cdot q_2 \cdots q_l \quad q_i \text{ so prafaktori.}$$

Imamo:

$$p^2 = 2 \cdot q^2$$

$$p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdots p_k \cdot p_k = 2 \cdot q_1 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_2 \cdots q_l \cdot q_l$$

$$\text{Videlim } p_1 = 2$$

$$2 \cdot 2 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdots p_k \cdot p_k = 2 \cdot q_1 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_2 \cdots q_l \cdot q_l$$



$$q_1 = 2$$

Povzemišmo:

$$p = 2 \tilde{p}$$

$$q = 2 \tilde{q}$$

p in q sk. doz

dajivz z 2

Višle: $\frac{p}{q}$ ni okrajšan,

—————~~×~~—————.

