

Številke - množevanje

Racionalne številke - množevanje:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad / \cdot m_1 \cdot m_2 \quad |$$

$$m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$$

Torej: Če se ulomke $\frac{m_1}{m_2}$ in $\frac{m_2}{m_1}$ referi:

$$m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1,$$

potem ulomke predstavljata isto racionalno število.

Racionalne številke lahko predstavljamo na različne načine:

- 1.) z ulomki
- 2.) z decimalnimi števili

3,14159

Decimálna čísla so početne nestranné:

Príklad: zapíšte čísla;

$$3, \quad 3,1 = \frac{31}{10}, \quad 3,14 = \frac{314}{100}, \quad 3,141 = \frac{3141}{1000} \dots$$

Všetchno konečno decimálna čísla je racionálne

- teda je racionálne číslo.

Zapísať čísla z decimálnou i záznamu
pomocou potencie čísla 10.

$$3,14159 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + \\ + 9 \cdot 10^{-5}.$$

$$314,15 = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

Ali je tudi obratno res: torej, ali je vsako
racionalno število končno decimalno število?

Ne: nekateri racionalni števila ne moremo
prestaviti s končnimi decimalnimi števili.

Primer:

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$$
$$= 0,\dot{3}$$

Deli smo neskončno decimalno število,
ki pa je periodično.

Domena: Vsako periodično decimalno število
je racionalno

"Odet z primerom"

n_j ho

$$x = 2, \underline{12342} \ 12342 \ 12342 \ \dots$$

$$100.000 x = 2 \ 12342, 12342 \ 12342 \ \dots$$

$$100.000 x = 2 \ 12342, 12342 \ 12342 \ \dots$$

$$x = 2, \underline{12342} \ 12342 \ 12342 \ \dots$$

$$99.999 x = 212340$$

$$x = \frac{212340}{99.999}$$

$\Rightarrow$ pe jò esbomek

x jò terej racionalo skails.

Sphāmi biez:

$$x = 0, n_1 n_2 n_3 \dots n_d \ n_1 n_2 n_3 \dots n_d \cdot n_1 n_2 n_3 \dots n_d \dots$$

$$n_1, \dots, n_d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$n_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \text{ k } \forall j = 1, 2, \dots, d$$

d je pozitívne celé číslo.

$$10^d x = m_1 m_2 m_3 \dots m_d, m_1 m_2 \dots m_d m_1 m_2 \dots m_d \dots$$

$$x = 0, m_1 m_2 \dots m_d m_1 m_2 \dots m_d \dots$$

$$\underbrace{999\dots 9}_{d-1} x = m_1 m_2 m_3 \dots m_d$$

$$x = \frac{m_1 m_2 m_3 \dots m_d}{\underbrace{99\dots 9}_{d-1}} \in \mathbb{Q}.$$

□

Dokazali sme

Lemma: Každý periodický desiatinný číselník je racionálny číselník.

Videli sme: $\sqrt{2}$ nie je racionálny číselník.

Rečni števila

Ovis konstrukcija množice rečnih števil.

Def: Množica $A \subset \mathbb{Q}$ je *navzgor omejena*,
če obstaja $c \in \mathbb{Q}$, tako da velja

$$x \leq c \quad \forall x \in A$$

Poznamo: c je *zgoranja meja* množice A .

Definicija Množica $B \subset \mathbb{Q}$ je *navzdol omejena*, če obstaja $d \in \mathbb{Q}$, tako da velja:

$$x \geq d \quad ; \quad x \in B.$$

Število d je *leđja spodnja meja* množice B .

Množica, ki je omejena navzgor in navzdol je omejena množica.

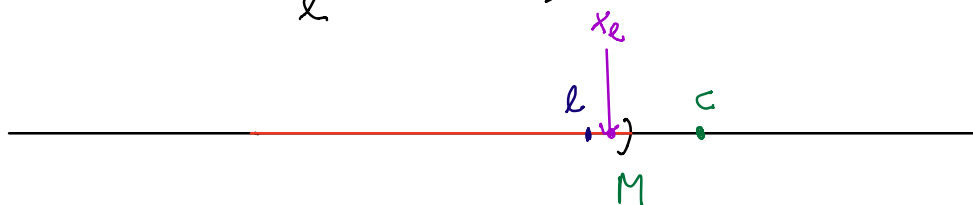
Znas terminini sk maskebi skoli:

Definicija: Skola $M \in \mathbb{Q}$ je **najmanjše**
gornje meje ali **supremum** množice $A \subset \mathbb{Q}$
če za M velja:

1. M je gornje meje množice A
2. Če je $l < M$, potem l ni gornje meje A .

T- pomeni: Za $\forall l < M$ obstaja vsaj en
element $x_l \in A$, za katerega velja

$$x_l > l.$$



Običajno pišemo tako:

M je supremum A , če je gornje meje in

$\bar{x}$ n $\forall \varepsilon > 0$ veljz:

$M - \varepsilon$ ni zgornja meja.

Opomba:

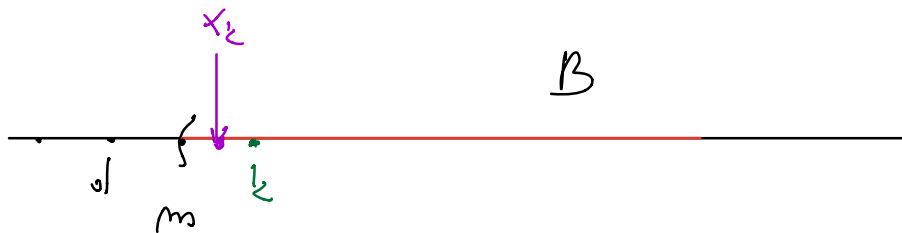
$$M = \sup A$$

Ker se je izračunalo tudi največja spodnja meja.

Definicija. Število $m \in \mathbb{Q}$ je največja spodnja meja množice $B \subset \mathbb{Q}$, če veljz:

1. m je spodnja meja

2. $\forall k > m$ veljz: k ni spodnja meja B



Torej: obstaja vsaj eno število x_k , za katero velja
 $x_k < k$.

Pomembno vprašanje:

Ali ima vsaka množica omejenih podmnožic množice $\mathbb{Q}$ supremum (najmanjšo zgornjo mejo)?

Pomembno: Po naši definiciji je supremum element množice $\mathbb{Q}$ racionalnih števil.

Oglejmo si množico vseh decimalnih približkov števil $\sqrt{2}$.

$A = \{ \text{končni decimalni približki } \sqrt{2} \}$

$= \{ 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, \dots \}$

(Ta množica je seveda neomejena).

Množica A je realsko najvišje omejena:

$$\text{Realsko ; } \forall x \in A ; \quad x \leq \sqrt{2}$$

Ali ima v množici $\mathbb{Q}$ supremum?

Ne.

Množica A sicer ima "supremum".

Ta "supremum" je seveda $\sqrt{2}$.

Videči bomo, v matematiki potrebujemo množico števil, ki vsebuje vsa racionalna števila, poleg tega pa se supremume vseh najvišje omejnih podmnožic množice $\mathbb{Q}$.

Def: Množica, ki ima zgoraj dve lastnosti se imenuje množica **reálnih števil**.

Označ: $\mathbb{R}$.

Istakaj naprej bo naš def. supremumov,
spremenljiv?

Def: Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ neprazna omejena podmnožica.

Škema $M \in \mathbb{R}$ je supremum A , če velja:

- 1.) M je zgornja meja A
- 2.) $l < M \Rightarrow l$ ni zgornja meja.