

Realna števila - modeliranje

Spominimo se:

Definicija Mnóžica, ki vsebuje množico $\mathbb{Q}$ in supremume vseh naraščajočih omejenih podmnožic $\mathbb{Q}$, je množica **realnih števil**.

Oznaka: $\mathbb{R}$.

Seveda velja: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Velja pa tudi: $\sqrt[3]{2}, \sqrt[2]{5}, \dots, \pi, e, \dots \in \mathbb{R}$.

Mnóžica $\mathbb{R}$ je grupa za seštevanje,
množica $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je grupa za množenje.

Poznamo: $\mathbb{R}$ je grupa za $+$.

Najprej opazimo:

Naj bo $a \in \mathbb{Q}$ poljubno racionalno število.
Potem je $\{a\} \subset \mathbb{Q}$ in to je najzapr
omejena množica, kjer

$$\sup\{a\} = a.$$

Zato lahko rečemo:

$$\mathbb{R} = \{ \text{supremumi vseh najzapr omejenih} \\ \text{podmnožic v } \mathbb{Q} \}$$

Vsaka podmnožica v $\mathbb{Q}$ je **šternz**. To pomeni:

Za vsako podmnožico $A \subset \mathbb{Q}$ obstaja
sevijetljiva preslikava (**indeksacija**)

$$i : \mathbb{N} \rightarrow A$$

$$n \mapsto a_n \in A$$

Za i lahko izberemo tako preslikavo, da bo

veljalo: $i < j \Rightarrow a_i \leq a_j$.

Opomba: pri nekaterih množicah $A \subset \mathbb{Q}$ namo zelo morda izreči vse α , ki so manjši od nekake elemente v A .

Dokaz obstoje predstave iz ni trivialen.

Naj bosta sedaj $A, B \subset \mathbb{Q}$ razpršeni množici. Naj bosta indeksirani.

$$\begin{aligned} \text{Naj bo } \alpha &= \sup A \\ \beta &= \sup B \end{aligned}$$

Lahko je videti

$$\underline{\alpha + \beta = \sup C,}$$

kje α, β

$$\underline{C = \{ a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 + \dots, a_n + b_n, \dots \}}$$

Pr. tem sans imels?

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

Ker $j \subset \subset \mathbb{Q}$ nazywamy ograniczoną podsekwencją,

$j \supset C \in \mathbb{N}$, V_j deli smo:

$$\text{serp } C = \alpha + \beta.$$

Teil: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je

$$\alpha + \beta \in \mathbb{R}.$$

Na problem način bi dobili zaprtost
in množico. Problem bi dobili
obstoj inovator.

Spannung ϵ : $I_2 + m \cdot \text{ref}_2$ distibution

Zakon:

$$a < b + c \Leftrightarrow ab + ac$$

Veljake asociativnostna zakona:

$$1.) \quad a < (bc) = (ab) <$$

$$2.) \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

Obe operaciji + in $\cdot$ sta komutativni

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Funkcija absolutna vrednost

Def: Absolutna vrednost je funkcija

$$|| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$a \longmapsto |a|.$$

Podana je s predpisom:

$$|a| = \begin{cases} a & ; \text{ \u010di } a \geq 0 \\ -a & ; \text{ \u010di } a < 0 \end{cases}$$

Primer:

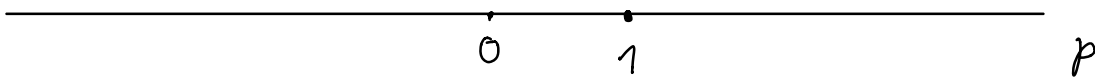
$$|5| = 5$$

$$|-5| = -(-5) = 5$$

0

Spominamo se. Mno\u017eico realnih \u0161tev lahko
pobljamo s pomo\u010djo *realne premice*.

V ravnini (v prostoru) nari\u0161amo premico



Na premici p izberemo dve to\u010dki.

1.) izhodi\u0161\u010e 0

2.) točls 1 — enota.

Točls 0 je slals štekl $0 \in \mathbb{R}$

Točls 1 je slals štekl $1 \in \mathbb{R}$

Nj ko $a \in \mathbb{R}$ poljslno vedlo štekl:
nj ko $a > 0$

Štekl a llls zlpisano v decimalni oblkl:

$$a = a_1 a_2 a_3 \dots a_n, b_1 b_2 b_3 \dots$$

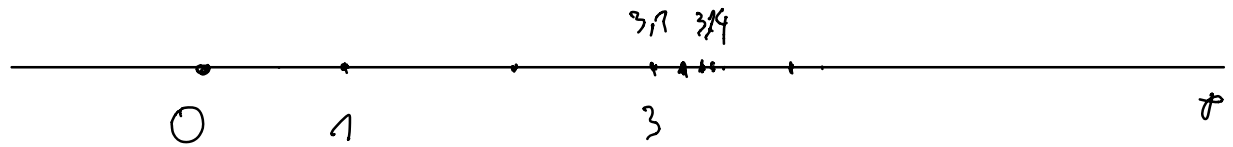
Tz zlpis je llllo lnlčen ali nestlčen.

Kllo iz lkp zlpis dohlno slkl a na p ?

Primer:

$$a = 3,14$$

prklkl:
3
3,1
3,14



Ta postopek lahko karotično nabljudimo
v neskončnost. Tako dobimo tudi slike
tistih realnih števil, ki niso racionalni,
so pa supremumski navzpramnejih
podmožic množice $\mathbb{Q}$. npr. število
 π , ki je supremum svojih
decimálnih približkov.

Nato **trihotomija** v množici realnih števil

Nato pravi:

Nj ho $x \in \mathbb{R}$ poljubno realno število;

Torej velja:

ali

ali

$$x > 0$$

$$x = 0$$

$$x < 0$$

$$(x \in \mathbb{R}^+)$$

$$(x \in \mathbb{R}^-)$$

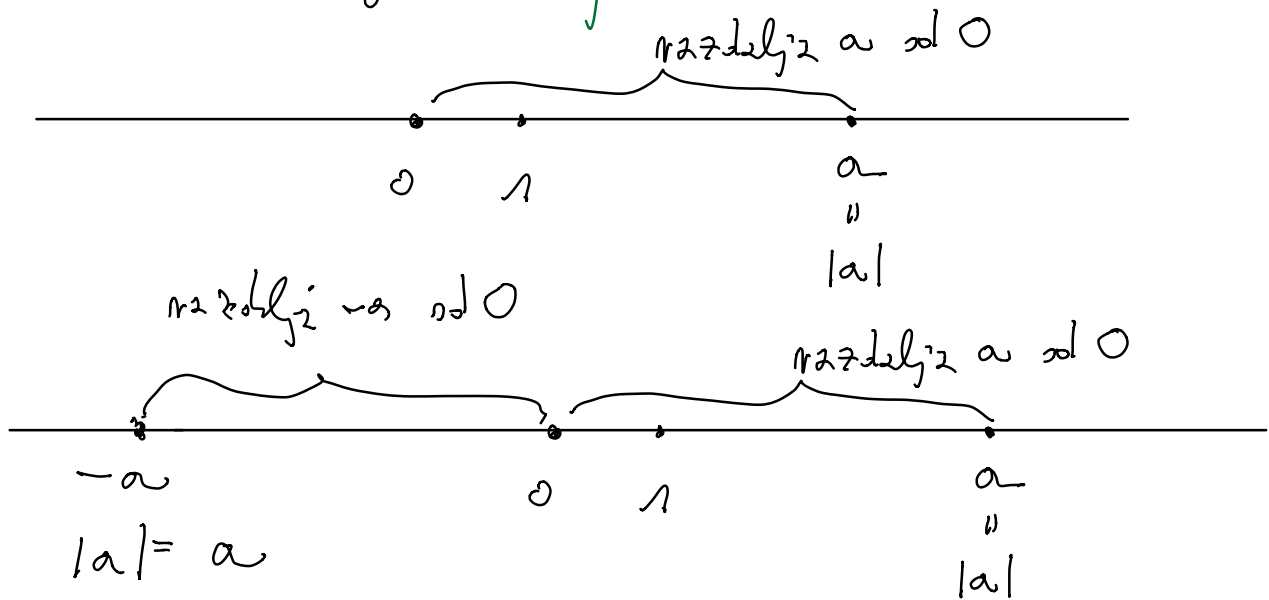
Recemo lahko tudi:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

- disjunktne enije

Geometrijski pomen absolutne vrednosti:

$|a|$ je razdalja a od izhodišča.



Razdalji števila a in $-a$ od izhodišča 0 sta vedno enaki.

Razdalje med 0 in 5 je enaka razdalji
med 0 in -5

Das je : $|5| = |-5|$
Splošno $|a| = |-a|$

Rečensko konstrukcijo

Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubno število in naj bo
 $r \in \mathbb{R}^+$ poljubno pozitivno število.

Oglejmo si množico vseh $x \in \mathbb{R}$, za katere
velja

$$\underline{|x - a| < r}$$

Iščemo torej vse rešitve zgoraj neenacije.

Neenačo obravnavamo kot razliskne možnosti:

$$1.) \underline{x - a \geq 0.}$$

Torej po definiciji $||$ velja:

$$|x - a| = x - a$$

Vstavimo v našo neenakost in dobimo:

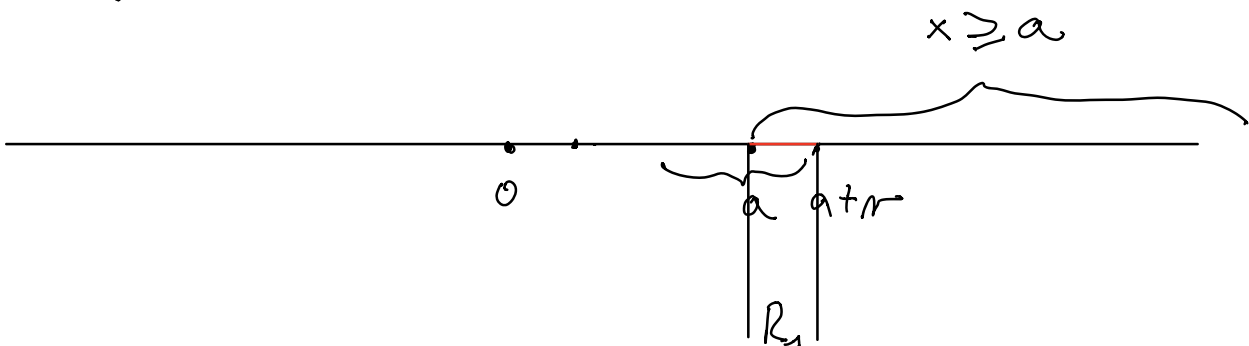
$$x - a < r$$

od kjer:

$$\underline{x < a + r}$$

Torej: Iz vse x , iz katere je $x - a \geq 0$ ^①
 morajo veljati $x < a + r$

Iz ① dobimo: $x \geq a$. Iz te x morajo
 veljati: $x < a + r$



Torej: Poi del R_1 rešite našo nalogo
je množica

$$R_1 = \{x; a \leq x < a + \pi\}$$

dobimo:

$$R_1 = [a, a + \pi)$$

2.) $x - a < 0$

V tem primeru po definiciji $||$ velja:

$$|x - a| = -(x - a) = -x + a = a - x$$

Vskazujemo $|x - a| < \pi$,

dobimo:

$$a - x < \pi$$

$$a - \pi < x$$

otírmí:

$$x > a - r$$

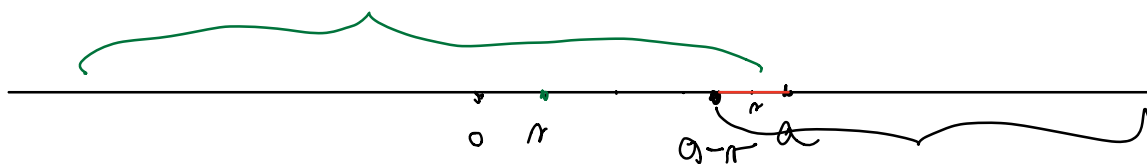
Truj: $\exists \text{ ke } x, \text{ ta kake } j \text{ } x - a < 0 \text{ } \textcircled{2} \text{ } \text{max}$

refrt: $x > a - r$

17 $\textcircled{2}$ sledi: $x < a$

Truj: $x < a \Rightarrow$ $x > a - r$

Naísímo truj del resíru: R_2
 $x < a$



$$R_2 = \{x; a - r < x < a\}$$

I_r je open interval:

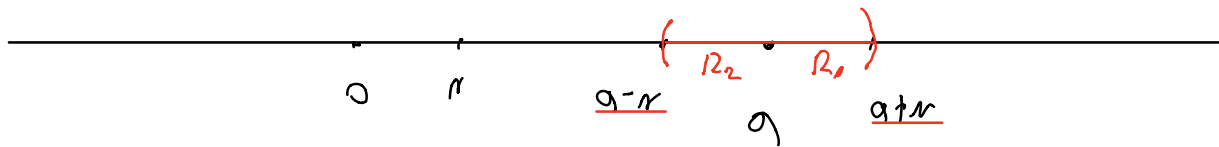
$$R_2 = (a - r, a)$$

Rešitev celotne neenote je unija delnih rešitev R_1 in R_2 .

$$R = R_1 \cup R_2$$

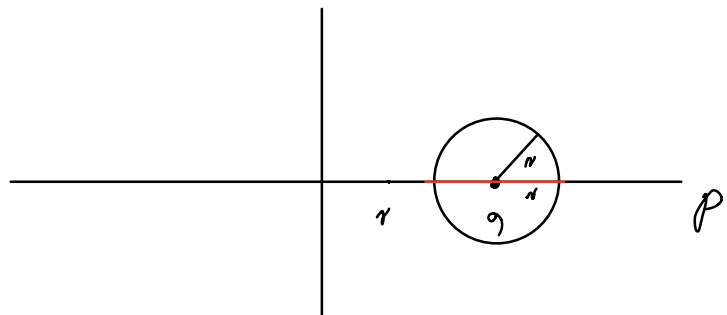
$$R = (a-r, a) \cup [a, a+r)$$

$$R = (a-r, a+r)$$



Primerjava: Možna je $(a-r, a+r)$ se imenuje dolica števila a z radijem r .

Včasih rečemo kar "krogla" s središčem a in radijem r .



Mnozitel R je prostý loka vzhledem k
jmu sedlisko a in navi s restu premio p.