LINEARNA ALGEBRA 2020/21
4. VAJE: 26. 10. 2020

1. Naj bo ravnina podana z normalo $\vec{n} = (7, 1, 0)$ in točko $x_0 = (2, 3, -1)$. Zrcali točko $A = (4, 3, 5)$ čez ravnino in določi razdaljo od točke do zrcaljene točke.

2. Naj bo ravnina podana z normalo $\vec{n} = (3, 1, 0)$ in točko $x_0 = (-1, 0, 2)$. Naj bo premica podana z normalno enačbo

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+2}{2}.$$

   Določi presečišče premice in ravnine ter kot, pod katerim premica seka ravnino.

3. Določi razdaljo med premicama $R = (0, 0, 1, -1)t + (2, 2, 4, 0)$ in $S = (1, 0, 2, 0)s + (-3, 0, 1, -1)$ v $\mathbb{R}^4$.

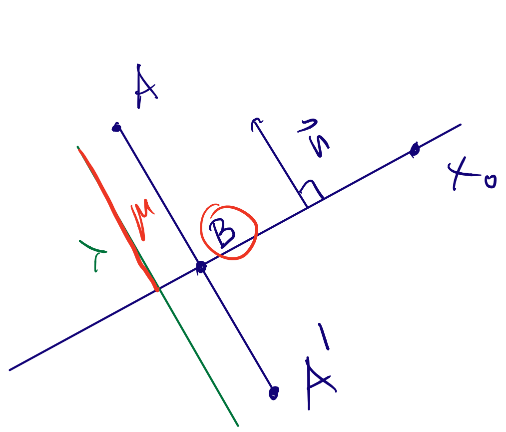
4. Projiciraj premico $(1, 0, 3, 4)t + (1, 1, 0, 0)$ na hiper-ravnino podano z $x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$.

5. Določi pravokotno projekcijo točke $\vec{a} = (1, 2, 2, 0)$ na ravnino parametrično podano z $t\vec{b} + s\vec{c} + \vec{d}$, kjer so $\vec{b} = (2, -1, 2, 3)$, $\vec{c} = (-1, 0, 3, 2)$ in $\vec{d} = (0, 1, 1, 1)$.

6. Točkam $(1, 0), (2, 3), (-1, -2)$ priredi premico $y = ax + b$, ki se jim po metodi najmanjših kvadratov najbolj prilega. Najdi tudi parabolo $y = ax^2 + bx + c$, ki se točkam najbolj prilega (Izrazi le sistem s katerim dobiš koeficiente a, b in c.)

Prevedemo na projekcijo točke na podprostor.

1. Naj bo ravnina podana z normalo $\vec{n} = (7, 1, 0)$ in točko $x_0 = (2, 3, -1)$. Zrcali točko $A = (4, 3, 5)$ čez ravnino in določi razdaljo od točke do zrcaljene točke.

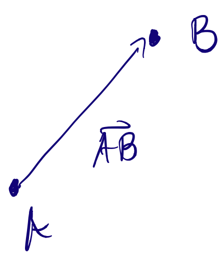


$AA' \parallel \vec{n} \parallel AB$

$\vec{AA'} = \lambda\vec{n} = 2\vec{AB} = 2\mu\vec{n}$

$\lambda = ?$

$\lambda = 2\mu$



$B - x_0 \perp \vec{n}$ $\quad \langle \vec{n}, B - x_0 \rangle = 0$

$B = A + \vec{AB} = A + \mu\vec{n}$

$\langle \vec{n}, A + \mu\vec{n} - x_0 \rangle = 0$

$\langle (7,1,0), (4,3,5) + \mu(7,1,0) - (2,3,-1) \rangle = 7\cdot4 + 3 + \mu(7\cdot7 + 1) - 7\cdot2 - 3\cdot1 = 0$

$31 + 50\mu - 17 = 14 + 50\mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{14}{50} = -\frac{7}{25}$

$\vec{AB} = -\frac{7}{25}\cdot(7,1,0)$ $\quad \underline{AA'} = \underline{-\frac{14}{25}(7,1,0)}$ $\quad A' = A + AA'$

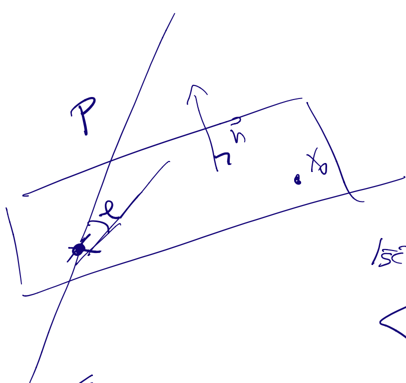
$\|AA'\| = \|\lambda\cdot\vec{n}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{n}\| = \frac{14}{25}\sqrt{50} = \frac{14}{5}\cdot\sqrt{2}$

2. Naj bo ravnina podana z normalo $\vec{n} = (3,1,0)$ in točko $x_0 = (-1,0,2)$. Naj bo premica podana z normalno enačbo

$$p:\quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+2}{2}.$$

Določi presečišče premice in ravnine ter kot, pod katerim premica seka ravnino.

φ – najmanjši kot med premico p in katerokoli premico na ravnini.
$\angle$ med p in projekcijo p na ravnino



$p(t) = (3,-1,2)t + (2,7,-2)$

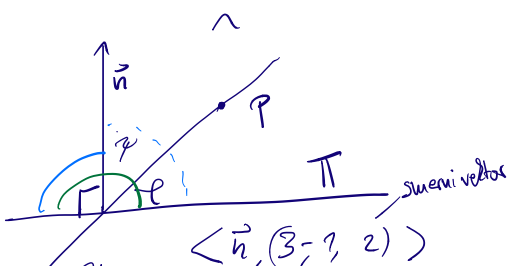
Iščemo t, da bo $p(t)$ na ravnini

$\langle \vec{n}, p(t) - x_0 \rangle = 0$

$\langle (3,1,0), (3,-1,2)t + (2,7,-2) - (-1,0,2) \rangle$

$= t(9-1) + 6 + 7 + 3 = 8t + 16 = 0 \quad | \boxed{t = -2}$

Presečišče: $-2(3,-1,2) + (2,7,-2) = (-4, 9, -6)$



$\pi \quad \frac{\pi}{2}$

$180°, 90°, \varphi, \psi$

$\varphi + \psi = 90° = \frac{\pi}{2}$

$\varphi = 90° - \psi = \frac{\pi}{2} - \psi$

$\cos\psi = \frac{\langle \vec{n}, (3,-1,2)\rangle}{\|\vec{n}\|\,\|3,-1,2\|} = \frac{\langle (3,1,0),(3,-1,2)\rangle}{\sqrt{10}\,\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}} = c$

$\underline{\varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos(c)}$

3. Določi razdaljo med premicama $R = (0,0,1,-1)t + (2,2,4,0)$ in $S = (1,0,2,0)s + (-3,0,1,-1)$ v $\mathbb{R}^4$.

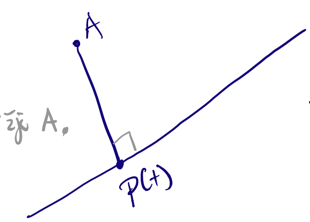
$\underline{A}$ p → razdalja od A do p

A ↓ točka, p ↓ premica

$\min\{\|\overrightarrow{Ap(t)}\| \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\overrightarrow{Ap(t)} \perp p$ → $\|\overrightarrow{Ap(t)}\|$ - razdalja od točke do premice

Za A iščemo t, da bo $p(t)$ najbližje A.



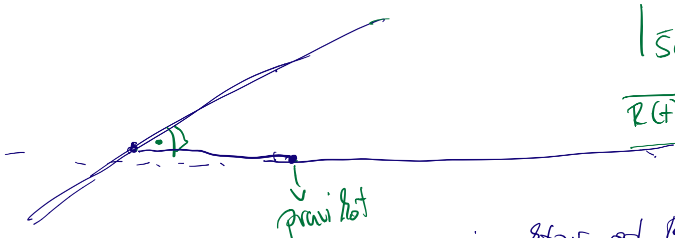
$R(t)$ $\quad S(s)$ $\quad \min\{\|\overrightarrow{R(t)S(s)}\| \mid t,s \in \mathbb{R}\} =$

Za vsak t najdemo $s(t)$ za katerega je $R(t)$ najbližje $S(s(t))$

$\overrightarrow{R(t)S(s(t))} \perp S(s(t))$

Kaj velja če je $R(t)$ najbližja točka točki $S(s(t))$, ki je na R?

Potem je $\overrightarrow{R(t)S(s(t))} \perp R$. (natanko tedaj)



Iščemo t in s, da bo $\overrightarrow{R(t)S(s)} \perp R$ in $\overrightarrow{R(t)S(s)} \perp S$

smerni vektor od R

$\# \langle R(t) - S(s), \vec{r} \rangle = 0$

-//- od S

$\star \langle R(t) - S(s), \vec{s} \rangle = 0$

$R = (0,0,1,-1)t + (2,2,4,0)$

$S = (1,0,2,0)s + (-3,0,1,-1)$

$\# \langle (0,0,1,-1)t - (1,0,2,0)s + (5,2,3,1), (0,0,1,-1) \rangle$

$= 2 \cdot t - 2s + 2 = 0$

$\star \langle (0,0,1,-1)t - (1,0,2,0)s + (5,2,3,1), (1,0,2,0) \rangle$

$= 2t - 5s + 11 = 0$

$2t - 2s = -2 \quad \big\} \cdot (-1)$

$2t - 5s = -11$

$-3s = -9 \quad s = 3$

$2t - 6 = -2$

$2t = 4 \Rightarrow t = 2$

razdalja od R do S

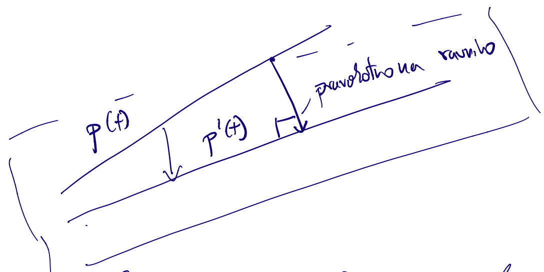
$\|R(2) - S(3)\| = \|(0,0,2,-2) - (3,0,6,0) + (5,2,3,1)\|$

$= \|(-3,0,-4,-2) + (5,2,3,1)\| = \|2,2,-1,-1\|$

$= \sqrt{8+2} = \sqrt{10}$

4. Pravokotno Projiciraj premico $(1,0,3,4)t+(1,1,0,0)$ na hiper-ravnino podano z $x_1+x_2+2x_3- \ 2x_4=0$.

Hiper-ravnina je prostor dimenzije 1 manj od celotnega prostora. (kodimenzije 1)



$p(t) - p'(t)$ $p'(t)$ – projekcija p na hiperravnino

$p(t) - p'(t) \perp$ hiperravnino
$\parallel$ normali — (hiper ravnine imajo normalo: hiperravnina je rešitev ene lin. enačbe $\sum a_i x_i = b \to$ normala je $\vec{n}=(a_1, a_2, \dots a_n)$)

$\vec{n} = (1,1,2,-2)$ — normala hiper ravnine

$p(t) - p'(t) = \underline{\lambda} \vec{n}$ $p'(t) = p(t) - \lambda \vec{n}$ $\langle \vec{n}, p'(t) \rangle = 0$

$\langle \vec{n}, p(t) - \lambda \vec{n} \rangle = 0$

λ - odvisen od t.

$\langle (1,1,2,-2), (1,0,3,4)t + (1,1,0,0) - \lambda(1,1,2,-2) \rangle$

$= (1+6-8)t + 2 - \lambda(2+8) = 0$

$10\lambda = -t + 2$ $\lambda = -\frac{1}{10}t + \frac{1}{5}$

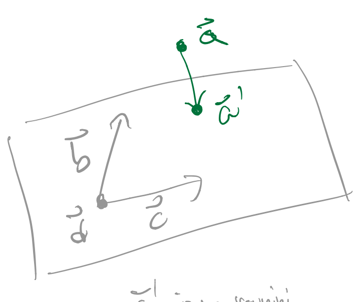
$p'(t) = \left[(1,0,3,4) + \frac{1}{10}(1,1,2,-2)\right]t + (1,1,0,0) - \frac{1}{5}(1,1,2,-2)$

5. Določi pravokotno projekcijo točke $\vec{a}=(1,2,2,0)$ na ravnino parametrično podano z $t\vec{b}+s\vec{c}+\vec{d}$, kjer so $\vec{b}=(2,-1,2,3), \vec{c}=(-1,0,3,2)$ in $\vec{d}=(0,1,1,1)$.

V $\mathbb{R}^3$ $\vec{a}\vec{a}' \parallel$ normala nimamo normale! nimamo vektorskega produkta!

$\vec{a}' - \vec{a} \perp$ ravnino

$\vec{a}' - \vec{a} \perp t\vec{b} + s\vec{c}$ za poljubna t, s



$(t=1 \ s=0)$ $(t=0, s=1)$

$\vec{a}' - \vec{a} \perp \vec{b}$ in $\vec{a}' - \vec{a} \perp \vec{c}$ $\to$ dovolj da velja za vse s,t

$\langle \vec{a}' - \vec{a}, t\vec{b} + s\vec{c} \rangle = t\underbrace{\langle \vec{a}' - \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{0} + s\underbrace{\langle \vec{a}' - \vec{a}, \vec{c} \rangle}_{0}$

$\vec{a}'$ je na ravnini

$\vec{a}' = t\vec{b} + s\vec{c} + \vec{d}$ iščemo t, s.

$* \langle \vec{a} - t\vec{b} - s\vec{c} - \vec{d}, \vec{b} \rangle = 0$

$* \langle \vec{a} - t\vec{b} - s\vec{c} - \vec{d}, \vec{c} \rangle = 0$

$\ast \langle (1,2,2,0) - t(2,-1,2,3) - s(-1,0,3,2) - (0,1,1,1), (2,-1,2,3) \rangle = 0$

$\ast \langle (1,2,2,0) - t(2,-1,2,3) - s(-1,0,3,2) - (0,1,1,1), (-1,0,3,2) \rangle = 0$

$4 - t(4+1+4+9) - s(-2+6+6) - (-1+2+3) =$

$= \underline{-18t - 10s = 0}$

$-1+6 - t(-2+6+6) - s(1+9+4) - (3+2)$

$= -10t - 14s = 0$

$\left.\begin{array}{l} 9t+5s=0 \\ 5t+7s=0 \end{array}\right\} \quad \underline{t=0 \quad s=0} \implies \vec{d}$ je najbližje $\vec{a}$

$\vec{d}$ je projekcija $\vec{a}$ na ravnino.

$\mathbb{R}^n$ – podprostor podan s k vektorji $\{a_i\}$ in točko b

$x \in \mathbb{R}^n$. Proj. x na podprostor $\quad x - y \perp a_i \quad y = \sum_{i=1}^{k} t_i \cdot a_i + b$

podanem točku v prostoru

Sistem k enačb s k neznankami