

Absolutna vrednost – modeliranje

Spomnimo se definicije:

$$\begin{aligned} | \cdot | : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

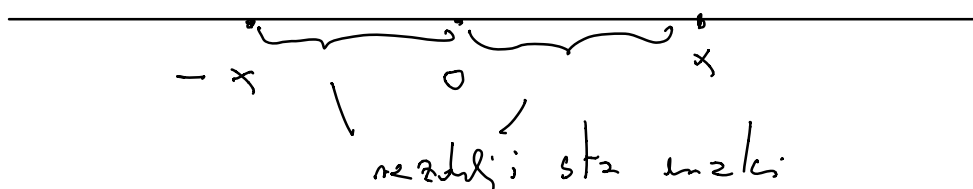
$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Priemer:

$$|3,14| = 3,14$$

$$|-3,14| = 3,14 = -(-3,14)$$

Pozor! smo: Če opazujemo realne števila na številski premici, potem $|x|$ pomeni oddaljenost števila x od izhodišča 0.



Sporočimo se, da smo rešili neenacbo

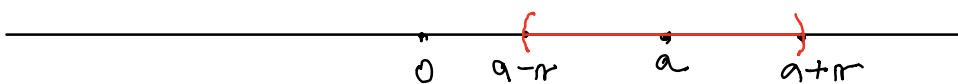
$$|x - a| < r$$

Rešujemo $a \in \mathbb{R}$ in rešujemo $r \in \mathbb{R}^+$
- kar pomeni $r \geq 0$.

Rešitev smo dobili v obeh korakih. Končni
rezultat je bil:

$$R = \{x ; a - r < x < a + r\}$$

$$R = (a - r, a + r)$$



Videl' bomo: Neenacbo

$$|x - a| < r$$

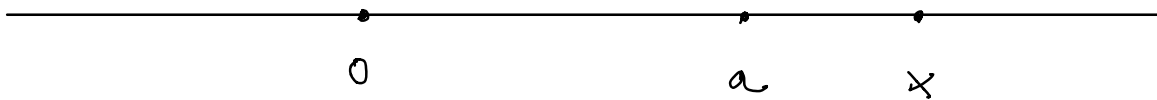
bomo sicer vli ne prestopamo.

Skoraj vedno si bomo pri zpravljanju zopisni morali predstavljati rešilen meenele
 - oz. **rešitveno množico** meenele.

Oglejmo si geometrijski pomen izreka

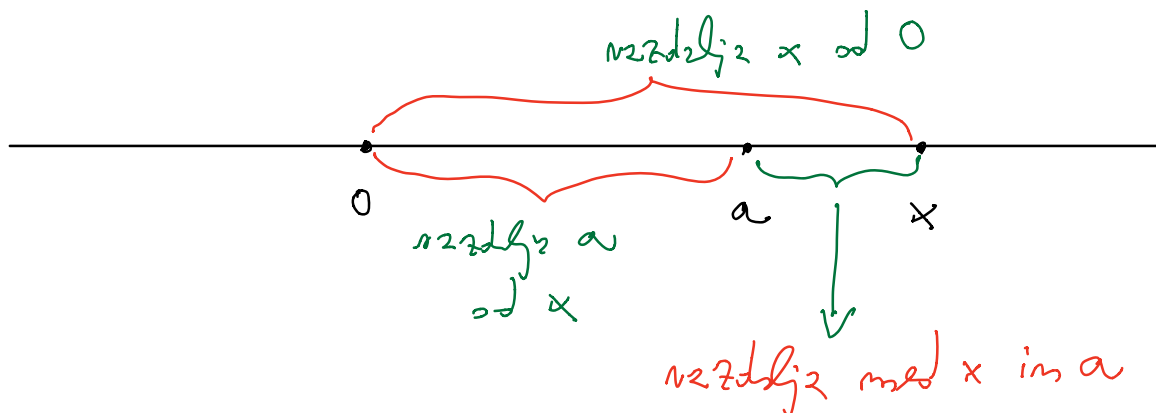
$$|x - a|$$

Nj bo najprej $x > a$

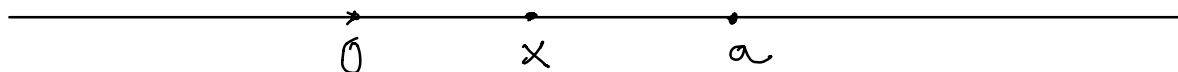


Tudi po definiciji abs. vrednosti velja

$$|x - a| = x - a$$

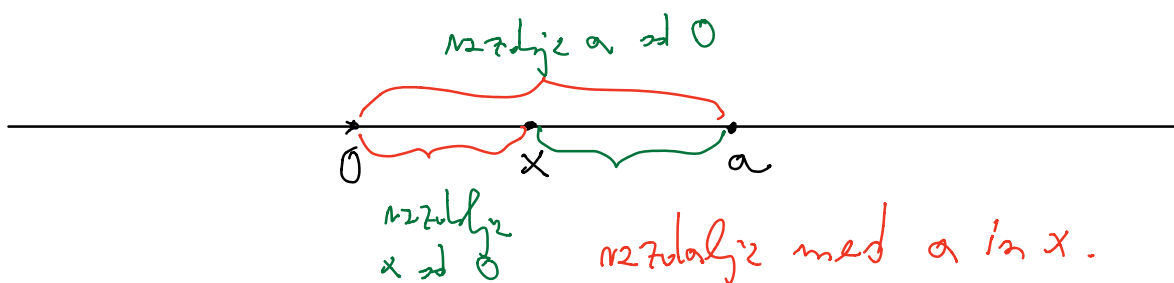


Näi ho sedji $x < a$



V lēn priekš jē $(x - a) < 0$. Ētā
pa definīcij abs. vērtosti veida:

$$|x - a| = -(x - a) = a - x$$



Pilnīga ir arī enzēlo

$$|x - a| = r$$

Ēpēj sum vīdli: $|x - a|$ jē atd. no
no tāluma x no a. (Atšķirīgs x no a).

Zgornjo enačbo lahko sedaj "prevedemo v stek-v besede".

$$|x - a| = r$$

oddaljenost x od a je r

Kolikšni dve točki v $\mathbb{R}$ (oz. na številski premici) sta od a oddaljeni natanko za r ?

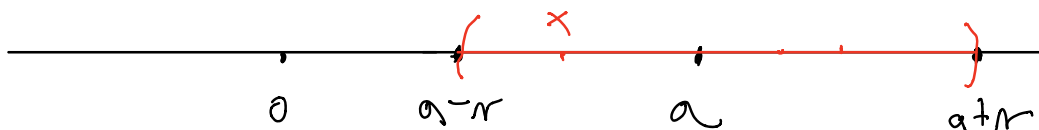
$$a - r \quad \text{in} \quad a + r$$

Kaj torej pomeni *neenakost*

$$|x - a| < r$$

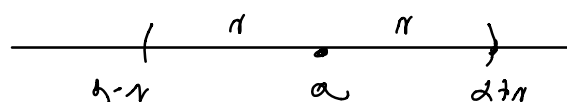
oddaljenost x od a je manjša od r

V resnici naše neenakosti torej kažejo vsi tisti x , katerih oddaljenost od a je manjša kot r .



Torej:

$$\boxed{|x - a| < r} \xrightarrow{\text{rešitev}} (a-r, a+r)$$



Kompleksna števila

Hitro se izkaže, da matrične relativno enostavne enačbe ne moremo rešiti znotraj množice realnih števil. Najenostavnejši primer take enačbe je kvadratna enačba

$$x^2 = b$$

$$b < 0$$

b je pozitivna, x pa je neznanka.

Najenostavnejši primer te enačbe je:

$$x^2 = -1$$

Ker je kvadrat vsakega od 0 različnega
realnega števila **pozitiven**, zgoraj enačbo nimamo
nobene realne rešitve. V množici $\mathbb{R}$ ni
rešitev zgoraj enačbe.

Če želimo dobiti množico števil, ki bo
vsebovala rešitve enačb oblike

$$x^2 = b \quad ; \quad b < 0,$$

moramo množico $\mathbb{R}$ realnih števil
razširiti.

Zadej bomo $\mathbb{C}$ z definicijo množice $\mathbb{C}$ kompleksnih števil.

Definicija: Množica $\mathbb{C}$ kompleksnih števil je množica urejenih parov realnih števil.

Torej: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a, b) ; a, b \in \mathbb{R} \}$

V množici $\mathbb{C}$ vpeljemo dve operaciji:

1.) seštevanje $\oplus$ določimo seštevanje v $\mathbb{R}$

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$


(levo stran je definirana z desno stranjo)

2.) množenje $*$

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Prepričajmo se, da je $\mathbb{C}$ opremljena z operacijama $\oplus$ in $*$ s algebrizirano strukturo.

Prepričali se bomo, da je $(\mathbb{C}, \oplus)$ grupa in tudi, da je $(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, *)$ tudi grupa.

a.) $(\mathbb{C}, \oplus)$ je grupa.

1.) Najprej moramo poišči nevtralni element.

Takoj vidimo:

$$\underline{(a,b) \oplus (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)}$$

$$(0,0) \oplus (a,b) = (0+a, 0+b) = (a,b)$$

Torej: $(0,0) \in \mathbb{C}$ je nevtralni elt. za $\oplus$.

2.) Naj bo $(a,b) \in \mathbb{C}$ poljuben kompleksno število.

Poišči moramo njegov inverzni elt. za $\oplus$.

Takj wibino:

$$(a, b) \oplus (-a, -b) = (a-a, b-b) = (0, 0)$$

$$(-a, -b) \oplus (a, b) = (a-a, b-b) = (0, 0)$$

Torej; Inverzni elt. (a, b) j $(-a, -b)$.

Torej $(\mathbb{C}, \oplus)$ j res grupa.

b.) $(\mathbb{C}, *)$ j tudi grupa.

1.) Neutralni element:

Poiščimo ga:

$$(a, b) * (e, f) = (a, b)$$

Po def $*$ imamo:

$$(a, b) * (e, f) = (ae - bf, af + be) = (a, b)$$

Oditi smo dve enčbi z dve neznanki e in f :

$$ae - bf = a$$

$$af + be = b$$

$$ae - bf = a$$

$$be + af = b$$

Rešītu šīs tādā veidā:

$$e=1, f=0$$

Neitrālais elements ir bij

$$(1, 0)$$

2.) Izteiksim kompleksā skaitļa mūsu sistēmā
inverzē elementu.

Nāzī $(a, b) \in \mathbb{C}$ pārkļūst. Pāveido
 (x, y) , tā ka veids:

$$(a, b) * (x, y) = (1, 0)$$

Is definicij: množnja:

$$(ax - by, ay + bx) = (1, 0)$$

Torej:

$$ax - by = 1$$

$$ay + bx = 0$$

$$ax - by = 1$$

$$bx + ay = 0$$

Rešitev je enaka:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Prepričajmo se, da je res: Vstavimo v naš sistem:

$$a \frac{a}{a^2+b^2} - b \frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

$$b \frac{a}{a^2+b^2} + a \left(\frac{-b}{a^2+b^2} \right) = \frac{ab-ab}{a^2+b^2} = 0$$

Sistem

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

Učimo se želimos tako:

$$ax - by = 1 \quad / \cdot a$$

$$bx + ay = 0 \quad / \cdot b$$

$$a^2x - aby = a$$

$$b^2x + aby = 0$$

Seštejemo:

$$(a^2+b^2)x = a$$

Od kral

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Sedaj kral y izrazimo iz prve ali druge enačbe, dobimo

$$y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Torej:

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

Dokazati smo, da je kral $(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, *)$ grupa.

Opomba: sistematični izračun nevtralnega elementa:

$$(a, b) * (e, f) = (a, b)$$

$$(ae - bf, af + be) = (a, b)$$

Dobimo sistem:

$$ae - bf = a$$

$$af + be = b$$

Od tod

$$ae - a - bf = 0$$

$$be - b + af = 0$$

$$a(e-1) - bf = 0$$

$$b(e-1) + af = 0$$

oblikoma:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e-1 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Če je $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$, ima ta sistem enačb
natančno eno rešitev in sicer

$$e-1 = 0, \quad f = 0,$$

torej: $e = 1, f = 0$ oz. $(e, f) = (1, 0)$.

Les r_2 iszk $(a, b) \neq (0, 0)$ velja:

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 > 0$$