Matrike

Definicija in primeri matrik

Definicija matrike

Matrika velikosti $m \times n$ je urejena m-terica urejenih n-teric realnih števil, torej element prostora $(\mathbb{R}^n)^m$. Namesto

$$A = ((a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}), \ldots, (a_{m,1}, \ldots, a_{m,n}))$$

pišemo raje

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Opomba: Matrike velikosti 1×1 lahko identificiramo s skalarji.

Opomba: Matrikam velikosti $m \times 1$ pravimo **stolpčni vektorji**. Matrikam velikosti $1 \times n$ pravimo **vrstični vektorji**. Tako stolpčne kot vrstične vektorje lahko identificiramo z običajnimi vektorji.

Opomba: Stolpčnim vektorjem

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}$$

pravimo **stolpci** matrike (1). Matriko (1) lahko zapišemo kot

$$A = \left[\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \right]$$

Vrstičnim vektorjem

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{2,1} & \ldots & a_{2,n} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

pravimo **vrstice** matrike (1). Na preseku i-te vrstice in j-tega stolpca matrike (1) leži (i, j)-ti **element** (=(i, j)-ti **vhod**) matrike (1).

Operacije z matrikami

Produkt matrike s skalarjem je definiran po komponentah

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} & \dots & \alpha a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m,1} & \dots & \alpha a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Tudi **vsota dveh matrik** enake velikosti je definirana po komponentah

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,n} \end{bmatrix} :=$$

$$:= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}$$

Lastnosti teh dveh operacij so enake kot pri vektorjih.

Produkt dveh matrik velikosti $m \times n$ in $n \times p$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{bmatrix}$$

je taka matrika $C = AB$ velikosti $m \times p$, katere (i,j)-ti element je

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Torej je $c_{i,j}$ ravno skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B. Definicijo $c_{i,j}$ lahko zapišemo tudi takole

$$\begin{bmatrix} c_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \end{bmatrix}$$

Primer množenja dveh matrik

Zmnožimo matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Velja

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad BA = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Torej ni vseeno, v kakšnem vrstnem redu zmnožimo dve matriki.

Onovne lastnosti množenja matrik so

- $(AB)C = A(BC)$,
- $(A + B)C = AC + BC$,
- $A(B + C) = AB + AC$,
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$,

Transponiranka matrike A je taka matrika A^T, da za vsak i in j velja: (i,j)-ti element A^T je enak (j,i)-temu elementu A. S formulo:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}^T := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{m,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Primer transponiranja matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Osnovne lastnosti transponiranja matrik so

- $(A^T)^T = A$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,
- $(A+B)^T = A^T + B^T$,
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Ničelna matrika je taka matrika, ki ima vse elemente enake nič. Označimo z $0_{m,n}$ ničelno matriko velikosti $m \times n$. Kadar sta m in n znana iz konteksta pišemo kar 0 namesto $0_{m,n}$. Velja:

- Če k matriki A prištejemo ničelno matriko enake velikosti, dobimo A.
- Če matriko A z leve ali desne pomnožimo z ničelno matriko ustrezne velikosti, potem dobimo ničelno matriko.
- Če transponiramo ničelno matriko, dobimo ničelno matriko.

Identična matrika je taka kvadratna matrika, ki ima po glavni diagonali same enke, drugod pa same ničle. Identično matriko velikosti $n \times n$ označimo z I_n. Kadar je n znan iz konteksta, pišemo kar I namesto I_n.

- Če matriko A z leve ali desne pomnožimo z identično matriko ustrezne velikosti, potem spet dobimo matriko A.
- Če transponiramo identično matriko, spet dobimo identično matriko.

Matrični zapis sistema linearnih enačb

Sistem linearnih enačb

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

zapišemo s pomočjo matričnega množenja takole

$$
\begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Na kratko to zapišemo kot $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$
A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Matrični zapis Gaussove metode

Spomnimo se, da sistem rešujemo z uporabo naslednjih treh tipov **elementarnih transformacij**:

- k eni od enačb lahko prištejemo večkratnik druge enačbe;
- lahko zamenjamo vrstni red dveh enačb;
- enačbo lahko pomnožimo z neničelno konstanto.

Poskusimo te transformacije zapisati z matrikami.

Definirajmo **elementarne** $m \times m$ **matrike** $E_{i,j}(\alpha)$, $P_{i,j}$ in $E_i(\beta)$ takole:

- matriko $E_{i,j}(\alpha)$ dobimo tako, da v identični matriki I_m k i-ti vrstici prištejemo α-kratnik j-te vrstice;
- matriko $P_{i,j}$ dobimo tako, da v I_m zamenjamo i-to in j-to vrstico;
- matriko $E_i(\beta)$ dobimo tako, da v I_m množimo i-to vrstico z β.

Primeri elementarnih 2×2 matrik

$$E_{1,2}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Krajši račun pokaže, da lahko elementarne transformacije opišemo s pomočjo elementarnih matrik takole:

1. če v sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ k i-ti enačbi prištejemo α-kratnik j-te enačbe, potem dobimo sistem $E_{i,j}(\alpha)A\mathbf{x} = E_{i,j}(\alpha)\mathbf{b}$;
2. če v sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zamenjamo i-to in j-to enačbo, potem dobimo sistem $P_{i,j}A\mathbf{x} = P_{i,j}\mathbf{b}$;
3. če v sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pomnožimo i-to enačbo z β, potem dobimo sistem $E_i(\beta)A\mathbf{x} = E_i(\beta)\mathbf{b}$.

Gaussovo metodo lahko povemo takole: sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ toliko časa množimo z elementarnimi matrikami z leve, dokler ne dobimo sistema $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, pri katerem je A' **reducirane stopničaste oblike**.

$$
\begin{bmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times & 0 & \times & \dots & \times & 0 & \times & \dots & \times & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times & 0 & \times & \dots & \times & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots
\end{bmatrix}
$$

Matrični zapis metode najmanjših kvadratov

Kadar je sistem

$$Ax = \mathbf{b} \tag{2}$$

nerešljiv, poiščemo tak $\mathbf{x}_0$, ki minimizira izraz

$$\|Ax - \mathbf{b}\|$$

Takemu $\mathbf{x}_0$ pravimo **posplošena rešitev** sistema (2).

Primerjajmo matrični zapis zgoraj z vektorskim zapisom od zadnjič.
Če so $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ stolpci matrike A, potem je $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$.
Izraz $\|x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n - \mathbf{b}\|$ je minimalen če je $x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n - \mathbf{b}$ pravokoten na $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Če to razpišemo, dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \rangle \end{bmatrix}$$

kar se v matričnem zapisu glasi $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Skicirali smo dokaz naslednje trditve. Bolj podroben dokaz je spodaj.

Trditev

Posplošene rešitve sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ so enake običajnim rešitvam sistema

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \tag{3}$$

Opomba: Sistem (3) je vedno rešljiv v običajnem smislu (v 2. semestru).
Opomba: V dokazu bomo večkrat uporabili formulo $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \mathbf{c}^T\mathbf{d}$.

Dokaz: Naj bo $\mathbf{x}_0$ tak, da $A^T A\mathbf{x}_0 = A^T\mathbf{b}$. Potem za vsak vektor $\mathbf{x}$ velja

$$\langle A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), A\mathbf{x_0} - \mathbf{b} \rangle = (A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))^T(A\mathbf{x_0} - \mathbf{b}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T A^T(A\mathbf{x_0} - \mathbf{b})$$

kar je po predpostavki enako nič. Po Pitagorovem izreku odtod sledi

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\|^2 = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|^2 + \|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\|^2$$

Odtod sledi $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \geq \|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\|$, torej $\mathbf{x}_0$ res minimizira izraz $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$.

Dokaz v nasprotno smer je nekoliko daljši. Recimo, da je $\mathbf{x}_0$ posplošena rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Torej za vsak $\mathbf{x}$ velja $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \geq \|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\|$. Posebej za vsak $\mathbf{z}$ in t velja $\|A(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{z}) - \mathbf{b}\| \geq \|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\|$. Pokažimo, da odtod sledi, da sta $\mathbf{c} := A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$ in $\mathbf{d} := A\mathbf{z}$ pravokotna.

Po predpostavki je $\|\mathbf{c} + t\mathbf{d}\| \geq \|\mathbf{c}\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. Če $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle \neq 0$, potem za $t_0 := -\frac{\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle}{\langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle}$ velja $t_0\mathbf{d} \neq 0$. Po definiciji t_0 je $\langle \mathbf{c} + t_0\mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle = 0$, torej je $\|\mathbf{c} + t_0\mathbf{d}\|^2 + \|-t_0\mathbf{d}\|^2 = \|\mathbf{c}\|^2$, kar nam da protislovje $\|\mathbf{c} + t_0\mathbf{d}\| < \|\mathbf{c}\|$.

Iz pravokotnosti $\mathbf{c}$ in $\mathbf{d}$ sledi

$$\langle A^T(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}), \mathbf{z} \rangle = (A^T(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}))^T\mathbf{z} = (A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b})^T A\mathbf{z} = \mathbf{c}^T\mathbf{d} = 0.$$

Če vstavimo $\mathbf{z} = A^T(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b})$, dobimo $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Torej je $A^T A\mathbf{x}_0 = A^T\mathbf{b}$.

Primer posplošene rešitve sistema

Posplošena rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se ujema z običajno rešitvijo sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ko zmnožimo matrike, dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ki ima rešitev $x = y = \frac{1}{3}$. To je posplošena rešitev prvotnega sistema.

Primer - Regresijska premica v matričnem zapisu

Premico $y = ax + b$, ki se najbolje prilega točkam $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, m$, dobimo kot posplošeno rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

se pravi kot običajno rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_m \\ 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_m \\ 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Ko zmnožimo matrike, dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{bmatrix}$$

Najkrajša rešitev sistema

Kadar je sistem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

neenolično rešljiv, nas zanima najkrajša rešitev, se pravi rešitev z najmanjšo normo. Pokazali bomo, da najkrajšo rešitev dobimo z nastavkom $\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$.

Trditev

Najkrajša rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je $A^T\mathbf{y}_0$, kjer je $\mathbf{y}_0$ poljubna rešitev

$$AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}. \tag{4}$$

Opomba: Da iz rešljivosti sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sledi rešljivost sistema $AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$ bomo znali dokazati šele v drugem semestru.

Dokaz: Naj bo $\mathbf{x}_0$ poljubna rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in naj bo $\mathbf{y}_0$ poljubna rešitev sistema $AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Radi bi pokazali, da je $\|\mathbf{x}_0\| \geq \|A^T\mathbf{y}_0\|$. Pokažimo najprej, da sta $\mathbf{x}_0 - A^T\mathbf{y}_0$ in $A^T\mathbf{y}_0$ pravokotna. To sledi iz

$$\langle \mathbf{x}_0 - A^T\mathbf{y}_0, A^T\mathbf{y}_0\rangle = (\mathbf{x}_0 - A^T\mathbf{y}_0)^T A^T\mathbf{y}_0 =$$
$$= (A(\mathbf{x}_0 - A^T\mathbf{y}_0))^T\mathbf{y}_0 = (\mathbf{b} - \mathbf{b})^T\mathbf{y}_0 = 0$$

Če uporabimo Pitagorov izrek, dobimo

$$\|\mathbf{x}_0\|^2 = \|\mathbf{x}_0 - A^T\mathbf{y}_0 + A^T\mathbf{y}_0\|^2 =$$
$$\|\mathbf{x}_0 - A^T\mathbf{y}_0\|^2 + \|A^T\mathbf{y}_0\|^2 \geq \|A^T\mathbf{y}_0\|^2$$

odkoder sledi želena neenakost

$$\|\mathbf{x}_0\| \geq \|A^T\mathbf{y}_0\|$$

Opomba: iz dokaza sledi, da za poljubni rešitvi $\mathbf{y}_1$ in $\mathbf{y}_2$ sistema $AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$ velja $\|A^T\mathbf{y}_1\| = \|A^T\mathbf{y}_2\|$, torej je res vseeno, katero rešitev izberemo.

Primer najkrajše rešitve sistema

Poiščimo najkrajšo rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pomagamo si z nastavkom

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Ko vstavimo nastavek v sistem in uredimo, dobimo nov sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

katerega rešitev je $u = -\frac{4}{3}$, $v = \frac{2}{3}$.

Najkrajša rešitev prvotnega sistema je torej

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Za konec naredimo primerjavo matričnega in vektorskega zapisa metode. Sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahko zapišemo kot

$$\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{x} \rangle = b_1 \quad \ldots \quad \langle \mathbf{n}_m, \mathbf{x} \rangle = b_m \tag{5}$$

kjer so $\mathbf{n}_i$ transponirane vrstice matrike A. Rešitev iščemo z nastavkom

$$\mathbf{x} = y_1 \mathbf{n}_1 + \ldots + y_m \mathbf{n}_m \tag{6}$$

Ko nastavek (6) vstavimo v sistem (5) in uredimo, dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ki se v matričnem zapisu glasi $AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Potem je $\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$.

Inverz matrike

Inverz kvadratne matrike A je taka kvadratna matrika B, da velja

$$AB = BA = I.$$

Matrika ima lahko kvečjemu en inverz. Če sta namreč B_1 in B_2 dva inverza matrike A, potem velja $AB_1 = I, B_1A = I, AB_2 = I$ in $B_2A = I$, torej je

$$B_1 = IB_1 = (B_2A)B_1 = B_2(AB_1) = B_2I = B_2.$$

Če matrika A ima inverz, ga označimo z A^{-1}. Ničelna matrika seveda nima inverza. Zanimivo pa je, da inverza nimajo tudi nekatere neničelne matrike.

Primeri matrik, ki nimajo inverza

Če ima matrika A ničelno vrstico, potem nima inverza. Za vsako matriko B ima namreč produkt AB tudi ničelno vrstico, medtem ko matrika I nima ničelne vrstice. Torej je $AB \neq I$ za vsak B.

Če ima matrika A ničeln stolpec, potem nima inverza. Za vsako matriko B ima namreč produkt BA tudi ničeln stolpec, medtem ko matrika I nima ničelnega stolpca. Torej je $BA \neq I$ za vsak B.

Primeri matrik, ki imajo inverz

Elementarne matrike imajo inverze. Velja namreč

$$E_{i,j}(\alpha)^{-1} = E_{i,j}(-\alpha), \quad P_{i,j}^{-1} = P_{i,j} \quad \text{in} \quad E_i(\beta)^{-1} = E_i(\frac{1}{\beta}).$$

Primer

Če imajo matrike $A_1, \ldots, A_n$ inverze, potem ima inverz tudi njihov produkt. Velja namreč

$$(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Inverze matrik lahko uporabimo pri reševanju kvadratnih linearnih sistemov. Če $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pomnožimo z leve z A^{-1}, dobimo

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Naredimo še preizkus

$$A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Računanje inverza z Gaussovo metodo

Matriko A razširimo na desno z identično matriko iste velikosti. Dobimo matriko $[A|I]$. To matriko obdelujemo z elementarnimi transformacijami po vrsticah toliko časa, dokler levo od črte ne dobimo bodisi matrike z ničelno vrstico bodisi identične matrike. V prvem primeru matrika A nima inverza, v drugem primeru, pa je inverz tisto, kar stoji desno od črte.

Primer

Izračunajmo inverz matrike

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right].$$

Razširjena matrika je

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Če k drugi vrstici prištejemo z -3 pomnoženo prvo vrstico, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Če drugo vrstico delimo s -2, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Če k prvi vrstici prištejemo z -2 pomnožemo drugo vrstico, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Torej je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dokažimo sedaj, da ta metoda vedno deluje.

Naj bodo $E_1, \ldots, E_n$ take elementarne matrike, da ima matrika $S = E_n \cdots E_1 A$ reducirano stopničasto obliko. Ločimo dva primera.

Če ima matrika S ničelno vrstico, potem ni obrnljiva, saj ima potem tudi matrika ST ničelno vrstico za vsak T (glej prvi primer). Odtod sledi, da tudi matrika A ni obrnljiva (uporabi drugi in tretji primer).

Če pa matrika S nima ničelne vrstice, potem je enaka identični matriki. Odtod sledi $A^{-1} = E_n \cdots E_1$. To pa je ravno tisto, kar dobimo na desni v

$$[A|I] \xrightarrow{E_1} [E_1 A|E_1] \xrightarrow{E_2} \ldots \xrightarrow{E_n} [E_n \cdots E_1 A|E_n \cdots E_1] = [I|A^{-1}].$$

Spotoma smo dokazali, da ima matrika A inverz natanko tedaj, ko je enaka produktu elementarnih matrik.