

Reševanje sistemov lin. enačb (matrič.)

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \\ b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

- ① $m < n \Rightarrow$ sistem je nedoločen,
- ② $m = n \Rightarrow$ sistem je kvadraten,
- ③ $m > n \Rightarrow$ sistem je predoločen.

Matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ predstavlja lin. transformacijo $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\text{Im}(A) = \{Ax; x \in \mathbb{R}^n\} = \text{Lin}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\text{ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}$$

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A))$$

Če je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ potem je A obrnjiva oz. ne singularna, če izpolnjuje enega od naslednjih pogojev:

$$① \exists A^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: A^{-1}A = AA^{-1} = I,$$

$$\textcircled{2} \det(A) \neq 0,$$

$$\textcircled{3} \text{rang}(A) = n,$$

$$\textcircled{4} \text{ Ne obstaja } x \neq 0 : Ax = 0.$$

- A je simetrična, če je $A = A^T$.

- A je hermitska, če je $A = A^H$.

- A je ortogonalna, če je $A^T A = A A^T = I$.

Vektorske in matrične norme

Def.: Vektorska norma je preslikava

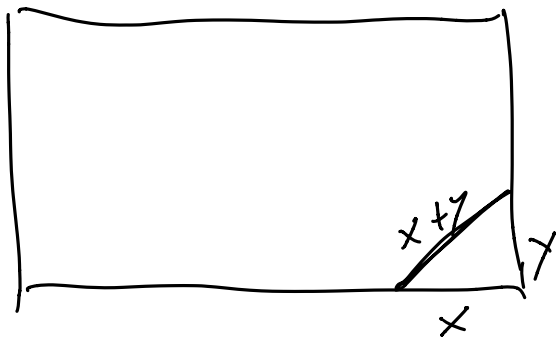
$$\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

z katero velja:

$$\textcircled{1} \|x\| \geq 0 \text{ in } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\textcircled{2} \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| ; \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\textcircled{3} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (trih. neenaka)}$$



Primeri : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

- $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$
(prva norma)

- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ (2-norma, evklidova norma)

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ $p \geq 1, p \in \mathbb{R}$

- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Cauchy - Schwarzova neenakost:

$$|x^H y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Pojubni vektorske norme $\|\cdot\|_p$ in $\|\cdot\|_2$ so ekvivalentni:

$$\exists C_1, C_2 > 0 : C_1 \|x\|_p \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_p.$$

Odstaja veliko ocen:

$$\cdot \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\cdot \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

⋮

Def.: Matrična norma je preslikava

$$\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R},$$

z naslednjo lastnostjo:

$$① \quad \|A\| \geq 0 \text{ in } \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

$$② \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|,$$

$$③ \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\text{trih. neenačba})$$

$$④ \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (\text{submultiplikativnost})$$

za $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Znane matrične norme:

$$\cdot \quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad \text{Frobeniusova norma}$$

- Operator'ska norma:
 $\|\cdot\|_r$ vektorska norma

$$\|A\| := \max_{\|x\|_r=1} \|Ax\|_r$$

$$= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r}$$

Primeri operator'skih norm:

$$\textcircled{1} \|A\|_1 := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \Rightarrow$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$$

$$\textcircled{2} \|A\|_\infty := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \Rightarrow$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

Lemma: Vsaka operator'ska norma je matrična norma.

Dokaz : Na enak ali drugače!

Se ena pomembna norma je
def. z operatorsko normo:

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \Rightarrow$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \quad ; \rho \text{ ji spek. vredif.}$$

Lemma : Za $\|\cdot\|_1$ velja

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right)$$

$$= \max_{1 \leq j \leq n} \|a_j\|_1 .$$

Dokaz :

$$\|Ax\|_1 = \|[a_1, a_2, \dots, a_n]x\|_1$$

$$= \|x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n\|_1$$

$$\leq |x_1| \|a_1\|_1 + |x_2| \|a_2\|_1 + \dots + |x_m| \|a_m\|_1$$

$$\leq \max_{1 \leq j \leq m} \|a_j\|_1 (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|)$$

$$= \max_{1 \leq j \leq m} \|a_j\|_1 \|x\|_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_{1 \leq j \leq m} \|a_j\|_1 = \|A\|_1$$

$$\Rightarrow \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|A\|_1$$

Emulcor A: Naj bo k fiksni indeks, za

$$\text{katerega } j \quad \max_{1 \leq f \leq m} \|a_f\|_1 = \|a_k\|_1$$

$$\text{ter } e_k = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-to mesto}}}{1}, 0, \dots, 0)^T$$

$$\frac{\|Ae_k\|_1}{\|e_k\|_1} = \frac{\|a_k\|_1}{1} = \|A\|_1 \quad \square$$

Spektralno norma $\|\cdot\|_2$ ji težko računati. Zato pogosto uporabimo ocene:

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F,$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1,$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty,$$

$$\cdot \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}.$$

V nadaljevanju bomo uporabljali samo usklajene pare vektorskih in mat. norm:

$$\|Ax\|_r \leq \|A\|_r \cdot \|x\|_r.$$

Tuditer: Za vsako matrično normo $\|\cdot\|$ in
pojemno lastno vrednost λ matrike A ,
velja:

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Dohet: (x, λ) lastni par: $Ax = \lambda x, x \neq 0$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|.$$

□

Primer: Kako lahko ocenimo last.

najbolj matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ najgor.

$$|\lambda| \leq \|A\| :$$

$$\textcircled{1} \|A\|_1 = 6 \Rightarrow |\lambda| \leq 6$$

$$\textcircled{2} \|A\|_\infty = 6 \Rightarrow |\lambda| \leq 6$$

Reševanje posebnih ^{mesingularnih} sistemov lin. enačb
(kvadratnih)

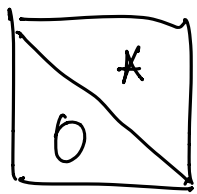
① Diagonalni sistem: $Ax = b$; A je diag.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i=1,2,\dots,n; a_{ii} \neq 0 \forall i$$

② Zgornji trikotni sistemi:

$$Ax = b; A \text{ je zgornji trikotni}$$



$$: a_{ij} = 0, \text{ če je } i > j$$

Pomembni pisemo $U := A$:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} = U$$

Kdaj je U nesingularna?

$$\det U = \prod_{i=1}^n u_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow u_{ii} \neq 0 \forall i$$

Kako reševati $Ux = b$; U zgornji trih. nesingularna matrika?

Zadnja enačba:

$$\mu_{mm} x_m = b_m \Rightarrow x_m = \frac{1}{\mu_{mm}} b_m$$

Kaf pa nāpary?

$$\mu_{m-1,m-1} x_{m-1} + \mu_{m-1,m} x_m = b_{m-1}$$

$$x_{m-1} = \frac{1}{\mu_{m-1,m-1}} (b_{m-1} - x_m \mu_{m-1,m})$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{1}{\mu_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^m x_j \mu_{ij} \right)$$

$$\text{za } i = m, m-1, \dots, 1$$

obratno nāstānjam.

Kakāma j īsasma zāhtērnost?

Torņ, hōlike oporacij pōtrēbojemo x

īzvačmm x?

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left(1 + 1 + \overbrace{(n - (i+1) + 1 - 1)}^+ \right) \\
& \quad + \overbrace{(n - (i+1) + 1)}^* \\
&= \sum_{i=1}^n \left(2 + \underbrace{n - i - 1} + \underbrace{n - i - 1 + 1}_{\cancel{\quad}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (2n - 2i + 1) \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^n n - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \\
&= 2n^2 - \cancel{2} \cdot \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + \cancel{n} \\
&= \underline{\underline{n^2}} = O(n^2)
\end{aligned}$$

③ Spodnja trikotni sistem

$$\begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & b_m \end{bmatrix}$$

Zelo podobno ② le da zbiramo
 s prvimi enačbo!!!

Direktno nastanjanje: čas. zaht. $\mu^2 = O(n^2)$