

Kompleksna števila - množenje

Videči smo:

$(\mathbb{C}, \oplus)$ je grupa

$(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, *)$ je grupa

Veljata tudi distributivnostna zakona

$$\begin{aligned}(a,b) * ((c_1,d_1) \oplus (c_2,d_2)) &= \\ &= (a,b) * (c_1,d_1) \oplus (a,b) * (c_2,d_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((c_1,d_1) \oplus (c_2,d_2)) * (a,b) &= \\ &= (c_1,d_1) * (a,b) \oplus (c_2,d_2) * (a,b)\end{aligned}$$

D.N. Preverite veljavnost distributivnih zakonov.

Obe operaciji sta komutativni:

D.N. Prepričajte se!

Spomnimo se še enkrat:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Vrnimo se k motivaciji: Bz uvedbo množice kompleksnih števil.

Poskusili smo rešiti enačbo

$$x^2 = -b \quad b > 0; b \in \mathbb{R}^+.$$

Vemo: ta enačba nima rešitev v $\mathbb{R}$.

Čeprav rečno število ni rešitev.

Va množico $\mathbb{C}$ lahko gledamo kot na
razširitev množice $\mathbb{R}$.

V mislih imamo naslednje:

Definirajmo preslikavo

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

s predpisom:

$$f(x) = (x, 0)$$

$$f: x \longmapsto (x, 0).$$

Preslikava f ima naslednji lepi lastnost:

$$1. f(x_1 + x_2) = f(x_1) \oplus f(x_2)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{f \times f} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow (x_1, 0) \quad (x_2, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} + \downarrow & & \downarrow \oplus \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ & x_1 + x_2 & \underline{(x_1 + x_2, 0)} \quad \underline{(x_1, 0) \oplus (x_2, 0)} \end{array}$$

po definíciji $\oplus$ a $\otimes$ resp.:

$$\underline{(x_1, 0) \oplus (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, 0)}$$

$$2.) f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) * f(x_2)$$

Res.:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \underline{(x_1 \cdot x_2, 0)}$$

$$\begin{aligned} f(x_1) * f(x_2) &= (x_1, 0) * (x_2, 0) = \\ &= (x_1 \cdot x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2) = \\ &= \underline{(x_1 \cdot x_2, 0)} \end{aligned}$$

Naša endomorfizácia je dokázaná.

Preobraz f vloží množicu $\mathbb{R}$ a množicu $\mathbb{C}$. Keď sme videli, je isomorfizmus, ale rečujeme

iz realnih števil $x_1, x_2, x_3, \dots$ v množici $\mathbb{R}^{(\bullet, +)}$
 ali pa z njihovimi dvojicami $(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0) \dots$
 v množici $\mathbb{C}$ z operacijama $\oplus$ in $\otimes$, ki
 reflektirajo v $\mathbb{C}$

Zato lahko s pomočjo naše preslikave f
 enačbo

$$x^2 = -b$$

$$x \cdot x = -b$$

lahko prenesemo v množico kompleksnih
 števil $\mathbb{C}$.

Pri preslici: $x \mapsto (x, 0)$

realni neznanki
 priredimo kompleksno
 neznanko

$b \mapsto (b, 0)$

realnemu produktu
 priredimo kompleksni
 produkt.

Določimo enačbo

$$(x, 0) \otimes (x, 0) = (-b, 0)$$

Alī jē izziņot risinājumus?

$$(x-x, 0) = (-b, 0)$$

ad šādā spēkā: $x^2 = -b$ Ozīmā, ka poslens mī
bīl mēģēn

$$0 = 0$$

V mēģi izziņot mēģēnā nēģēnā
mēģēnā mēģēnā 5 pēģēnā kompleģēnā mēģēnā.

$(x, 0)$ mēģēnā mēģēnā z (x, y)

Dēģēnā mēģēnā:

$$(x, y) * (x, y) = (-b, 0)$$

Poslens mēģēnā jēģēnā:

$$(x^2 - y^2, xy + yx) = (-b, 0)$$

$$(x^2 - y^2, 2xy) = (-b, 0)$$

$$x^2 - y^2 = -b$$

$$2xy = 0$$

Dva su načina rješenja: ili je $x=0$ ili je $y=0$.

1.) Pretpostavimo $y=0$

Dobivamo:

$$x^2 - 0^2 = -b$$

$$x^2 = -b$$

Ta izborna me da rješivost

2.) Pretpostavimo $x=0$

$$0^2 - y^2 = -b$$

$$-y^2 = -b$$

$$y^2 = b$$

$$b > 0$$

Dobivamo:

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{b}$$

Dobili sme teraz dve riešenia našej rovnice:

$$Z_1 = (0, +\sqrt{b})$$

$$Z_2 = (0, -\sqrt{b})$$

Uvidíme teraz: Našez maticinikov $\mathbb{R}$ v $\mathbb{C}$ je
uspelšny, $\mathbb{C}$ vsebuje riešenie rovnice

$$x^2 = -b, \quad b > 0.$$

Uvidíme: komplexne čísla súka $(0, y)$
so hstern z riešeni našej rovnice.

Ozkejmo si čísla $(0, 1) \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} (0, 1)^2 &= (0, 1) * (0, 1) = \\ &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = \\ &= (-1, 0) \end{aligned}$$

Tasj:

$$(0, 1)^2 = (-1, 0)$$

Šteils $(-1, 0)$ j' šķiek reāls šteils -1
(prek prestikaze f).

Šteils $(0, 1)$ š' rēko imenij kvadrātī
kren iz $-1 = (-1, 0)$.

Sekede imens div kvadrātī krens $-1 = (-1, 0)$

$$(0, 1) \quad \text{in} \quad (0, -1)$$

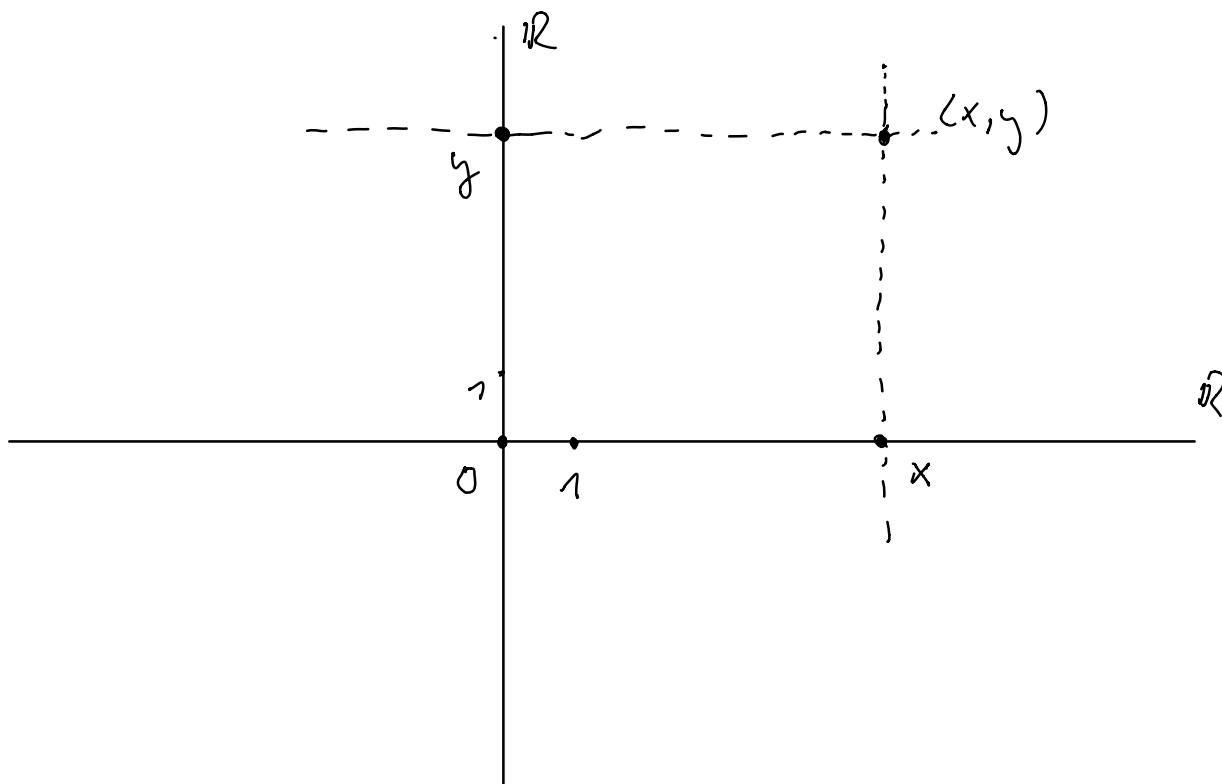
Gesmetrijslī opis kompleksnī šteil

kems: Reāls šteils geometrijslī opšēno
š' šteils premico (ne katīn izberemo 0 in 1).

Kot mnotīk š' kompleksnī šteils & karteziānī
padsulst $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Definīcija: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

Izvērtējam $\mathbb{C} (= \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ apskatīsim to kā
 reālo un iedomāto koordinātu sistēmu.



Pasemēsim simbolus:

$$(0, 1) = i$$

Kompleksno skaitļu $(0, 1)$ apzīmēsim ar simbolu i

kor verjz

$$(0, 1)^2 = (-1, 0)$$

im $\mathbb{C}$ heißt komplexer Zahl (x, y) entspricht
7 reellen Zahlen, nämlich:

$$i^2 = -1$$

2. symbol i ref₂: $i^2 = -1$.

Σελή p2 τμσς:

Vsako kompleksno število $(x, y) \in \mathbb{C}$ lahko
zapišemo v obliki

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

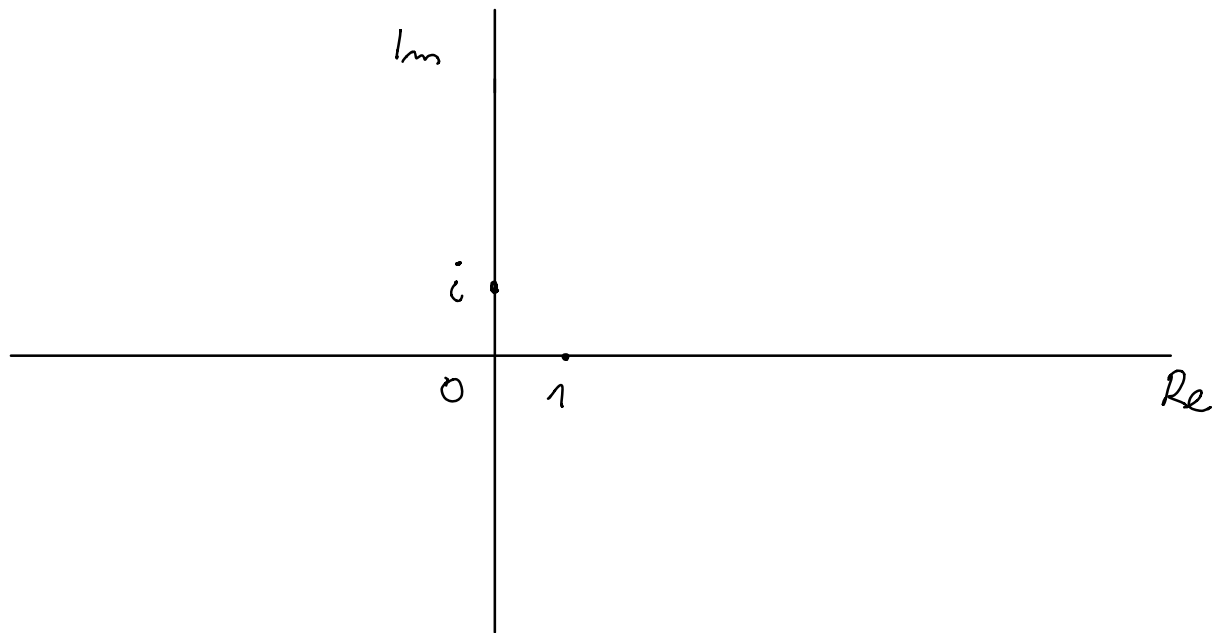
Isideli smo: Štorko $(1,0)$ označimo kar $z \in \mathbb{R}$
štorko $(0,1)$ označimo s simbolom i

Torej $(x, y) \in \mathbb{C}$ lahko zapišemo v obliki

$$(x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

oznane krajše

$$(x, y) = x + i y$$



Na realni premici ležijo številne točke $(x, 0) \sim x$

Številke na imaginarni premici so oblike $(0, y) \sim iy$

- imajojo se **imaginarni števila**. S simbolom i

označujemo število $(0,1)$ - to število in simbol i se imenujeta **imaginarna enota**.

Razumimo s pomočjo imaginarna enote.

Vzelo ^{kompleksno} število zapisujemo v obliki "binoma"
(glede na "spremenljivke" i)

$$(x, y) = x + i y$$

Poškusimo računati s kompleksnimi števili, kot da bi računali z binomi.

Začetniki:

$$(x_1 + i y_1) \oplus (x_2 + i y_2)$$

$$\text{" } (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = \underline{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}$$

Tudi če računamo kot z binomi, dobimo

$$\begin{aligned}
 (x_1 + iy_1) \oplus (x_2 + iy_2) &= \oplus \text{ poštebe shizijn} + \\
 &= x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = \underline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad \underline{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}
 \end{aligned}$$

Torej: sestavljanje nes hllho ker s pomočjo
seštevanja linearnost:

Množenje:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = \underline{(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

$$(x_1 + iy_1) * (x_2 + iy_2) = \text{* poštebe shizijn množenje linearnost}$$

$$= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + \cancel{i^2} y_1 y_2 =$$

$$= \underline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

2 reāliem binomiem es pieņemu kompleksu skaitli

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Tas ir redzams: 5 kompleksiem skaitļiem es
varu raksturot katru binomu šķēķi

$$x + iy,$$