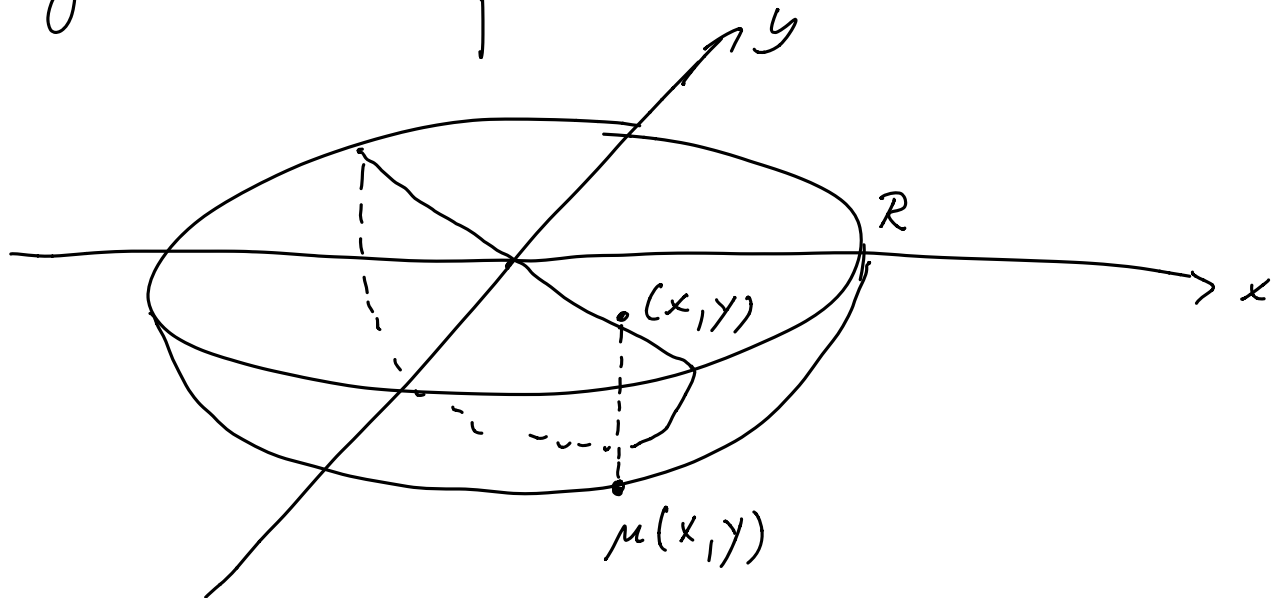
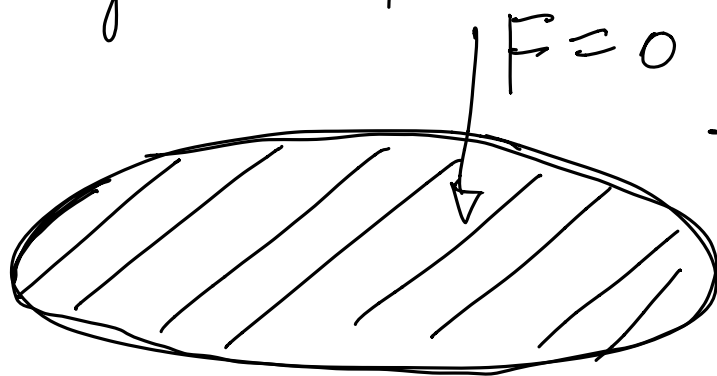


Upozil tamko opne na krožni tanki



Iščemo numerično aproksimacijo za μ !

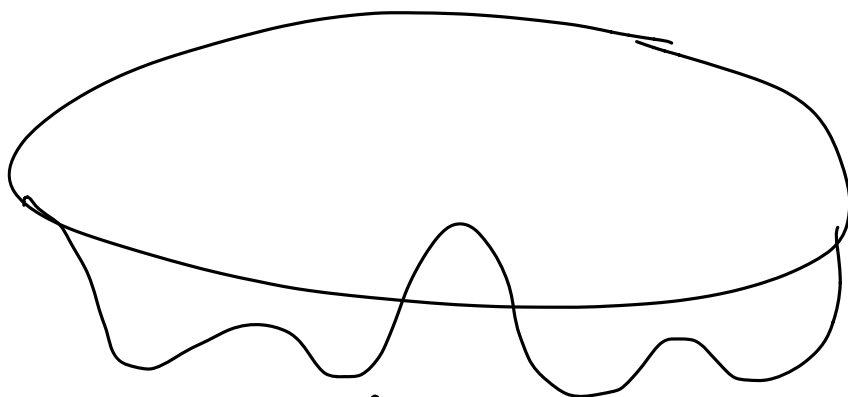
Kakšna je rešitev, če ni nobene zunanje sile?



$$\vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \mu(x, y) \equiv 0 \quad \checkmark$$

Če so zunanje sile prisotne, je rešitev lahko precej komplicirana:



Če sta v in f neodvisni od kota,
 in Poissonova enačba

$$\Delta v(r, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = f$$

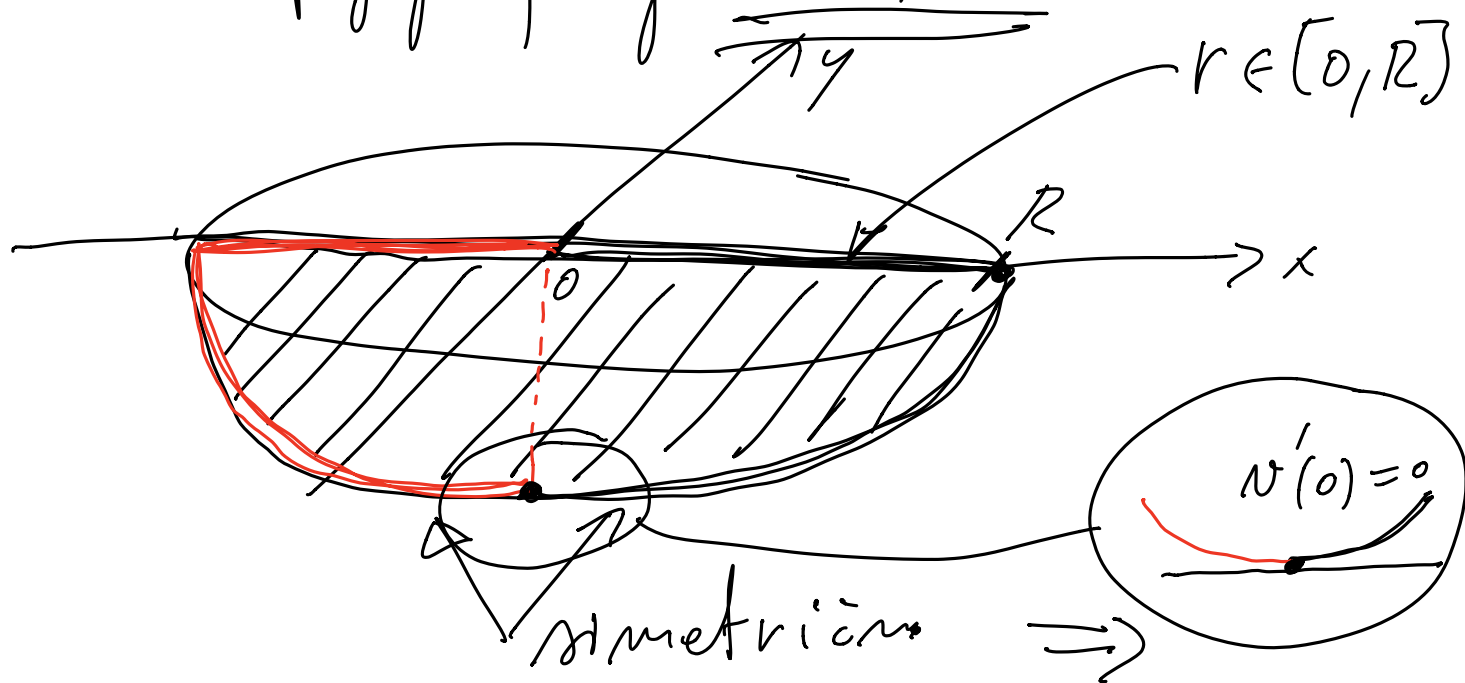
prenošamo v (upoštevamo $v = v(r)$)

$$\frac{1}{r} (r v'(r))' = f(r)$$

$$\frac{1}{r} (1 \cdot v'(r) + r \cdot v''(r)) = f(r)$$

$$\boxed{v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = f(r), \quad r \in [0, R]}$$

Robni pogoj pa ji $\underline{v(R) = 0}$.

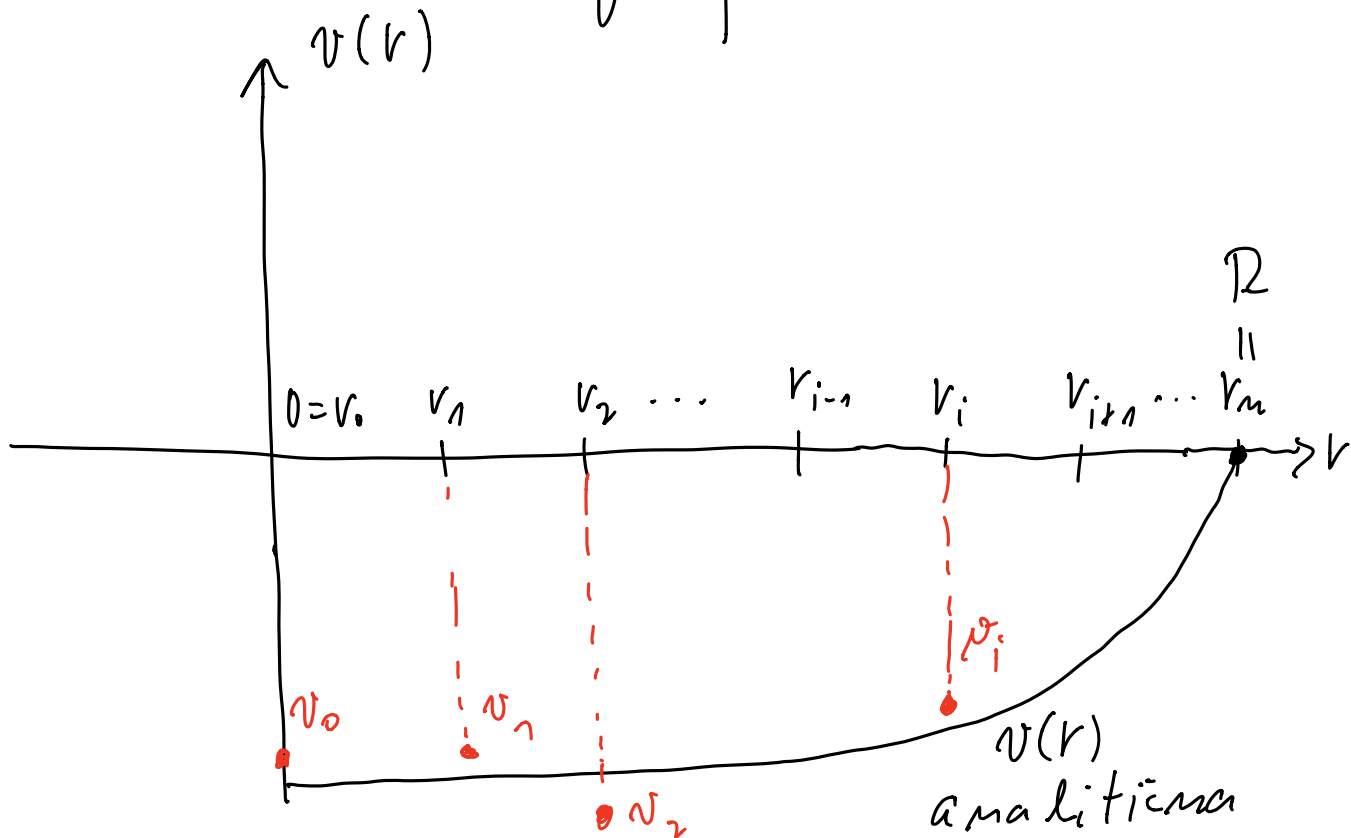


dobimo dodatni robni pogoj: $v'(0) = 0$

10.11.
$$v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = f(r) \quad \text{za } r \in [0, R]$$

$$v(R) = 0 \quad \text{in} \quad v'(0) = 0$$

Numerično reševanje problema



Želimo, da je $v_i \approx v(r_i)!!$

Naznamo so $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}$
 (ne pozabite, da je $v_m = v(R) = 0!!$)

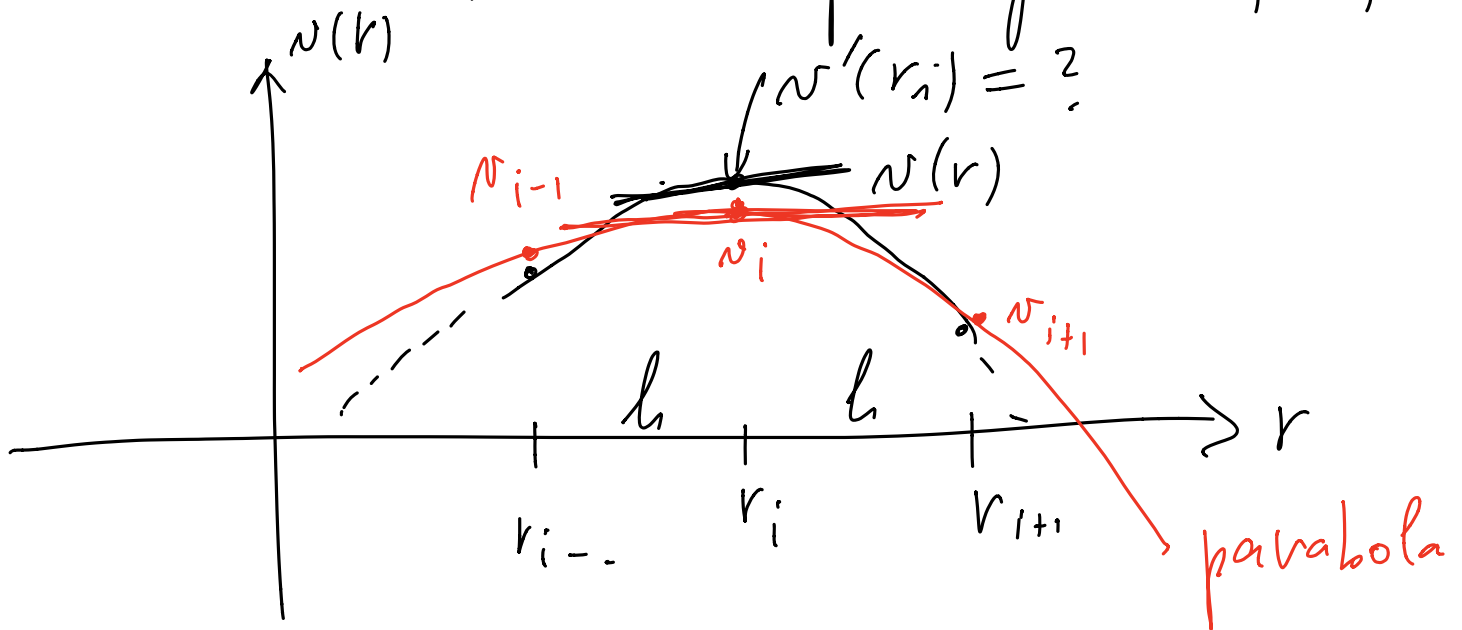
Idea: Dif. enačbo zapišemo v

točkah $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$:

$$v''(v_i) + \frac{1}{v_i} v'(v_i) = f(v_i), \quad i=0, \dots, n-1$$

$v''(v_i)$ in $v'(v_i)$ poskušamo aproksimirati z vrednostmi $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$!

Kako bi dobro aproksimirali $v'(v_i)$ (in $v''(v_i)$) le s pomočjo v_{i-1}, v_i, v_{i+1} ?



$$v'(v_i) \approx ???$$

Poiščemo parabolo skozi (v_{i-1}, v_{i-1}) ,

(v_i, v_i) in (v_{i+1}, v_{i+1}) ter pogledamo odvod te parabole v v_i : $\Rightarrow$ (račun)

$$v'(v_i) \approx \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2} \quad (\text{morda ji})$$

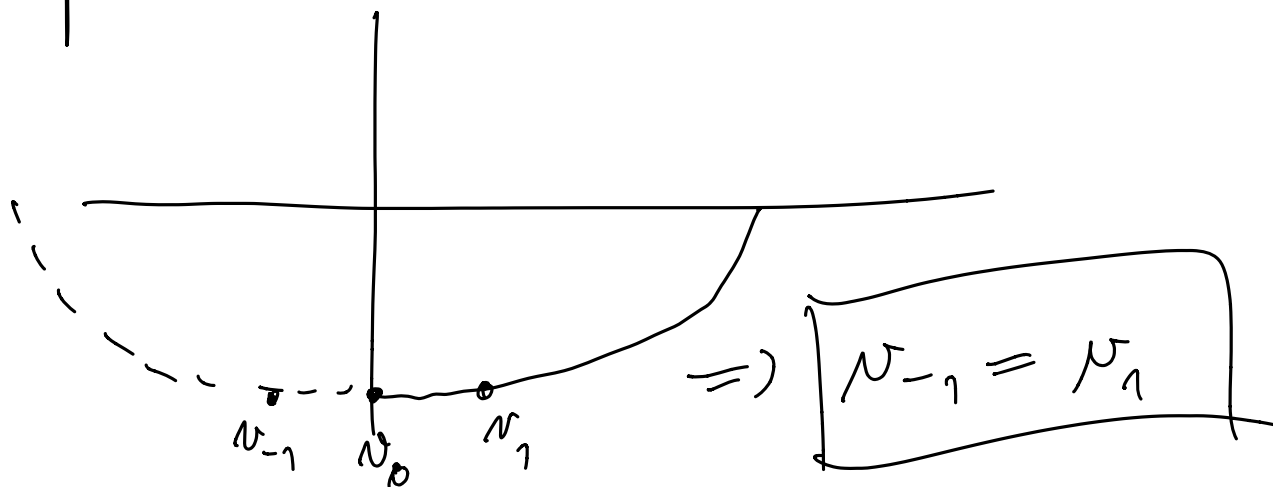
$2h$ $O(h^2)$

Podobno dobimo še:

$$v''(v_i) \doteq \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}$$

Ta dva izraza stavimo v dif. enačbo!

Če postavimo $v'(0) = 0$:



Dobimo tridiagonalni sistem enačb,
katerega matrika je oblike:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

3 diagonale

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & \dots \\ & & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Sistem $Ax = b$ lahko (pri pogojih na A) rešimo v času $O(n)$ in prostoru $O(n)$.

Klasični algoritmi potrebujejo $O(n^3)$ časa in $O(n^2)$ prostora!