

Kompleksni števili - uveljavljanje

Spominimo se:

$$(a, b) \mapsto a + ib$$

Pri tem je

$$i = (0, 1)$$

$$\begin{aligned} \underline{(a, b)} &= a(1, 0) + b(0, 1) = \\ &= a \cdot 1 + ib = \underline{a + ib} \end{aligned}$$

Videlismo: S kompleksnimi števili računamo kot z binomi:

$$\begin{aligned} (a, b) * (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ (a + ib)(c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}$$

Bistkennz bestmoch stekz $i \in \mathbb{C}$

$$i^2 = -1$$

ad fad:

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = -i \cdot i = -(-1) = +1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \\ i^5 = i \\ i^6 = -1 \\ i^7 = -i \\ i^8 = 1 \end{array} \right.$$

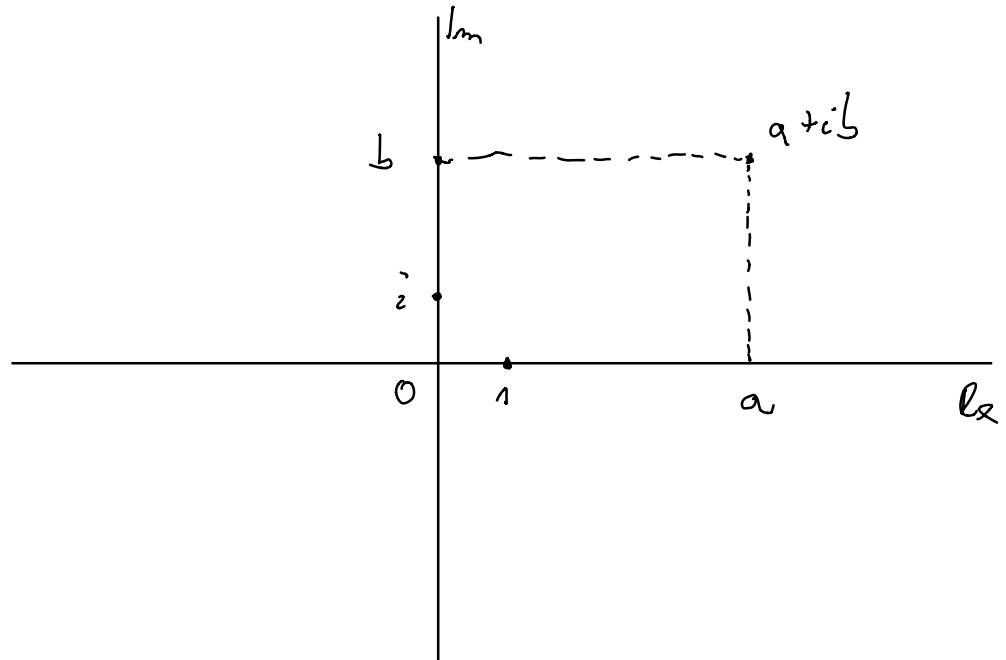
$$i^{2020} = i^0 = 1 \quad 2020:4 = 505$$

$$i^{27} = i^{24} \cdot i^3 = \underbrace{(i^4)^6}_1 \cdot i^3 = 1^6 \cdot i^3 = -i$$

$i^n = i^k$, kjer je k ostanek pri deljenju števila n s 4.

$$k = n \bmod 4$$

Kompleksne števila upoštevamo na kompleksni ravnini



Oznake:

$$z = x + i \cdot y$$

$$Re(z) = x \quad - \text{ realni del}$$

$$Im(z) = y \quad - \text{ imaginarni del}$$

Konjugacija:

$$z = x + iy$$

Def:

$$\bar{z} = x - iy$$

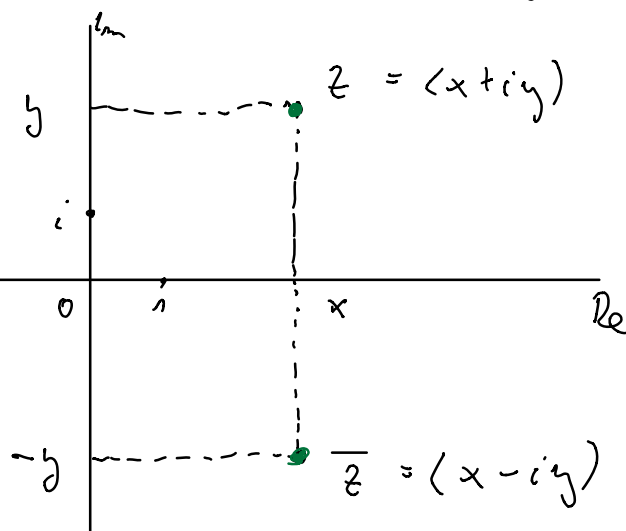
↑
Števil, konjugirano številu z

Takoj vidimo

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

$$\text{Res: } \overline{(\bar{z})} = \overline{(x - iy)} = x - (-iy) = x + iy = z.$$

Številu z konjugirano
številu $\bar{z}$ dobimo na
kompleksni ravnini
tako, da z prepročimo
preko realne osi.



S pomočjo konjugacije lahko zelo izbojšamo računanje s kompleksnimi števili.

$$z = a + ib \quad w = c + id$$

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$$

V skrajnem zapisu: $(a, b) * (c, d)^{-1}$

V čem je problem:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = x + iy$$

Pomembno je lahko kake: $\exists$ vsak število

$w = (c+id)$ velja:

$$\begin{aligned} w \cdot \overline{w} &= (c+id) \cdot (c-id) = \\ &= c^2 + \cancel{idc} - \cancel{idc} - \cancel{i^2} d^2 = \\ &= c^2 - (-1)d^2 = c^2 + d^2 \end{aligned}$$

$$w \cdot \overline{w} = c^2 + d^2$$

$c^2 + d^2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
je realno število.

Vonimo se z estonku;

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \\ &= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

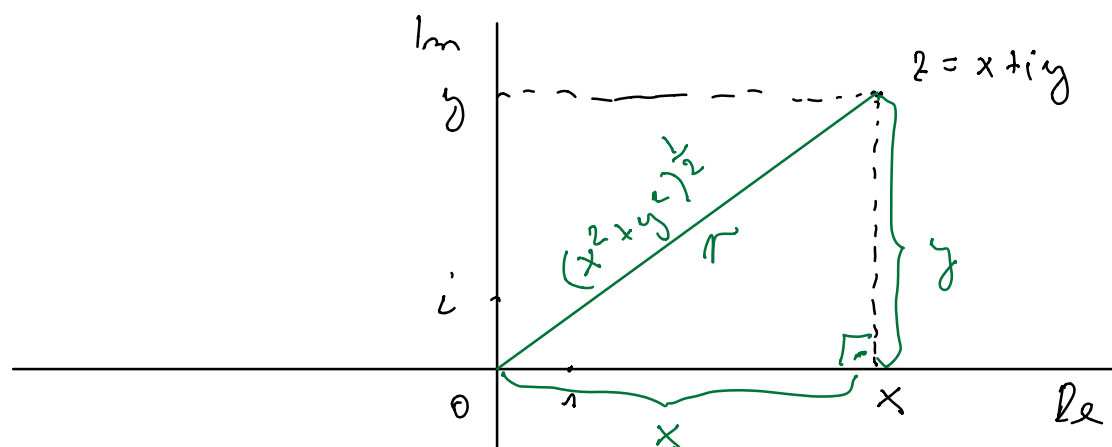
Absolutne väärtus

Def: Kui $z = x+iy \in \mathbb{C}$, Absolutne väärtus $|z|$ öeldakse z reaalne öeldaks, positiivne s. predpissom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Opazimo:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$



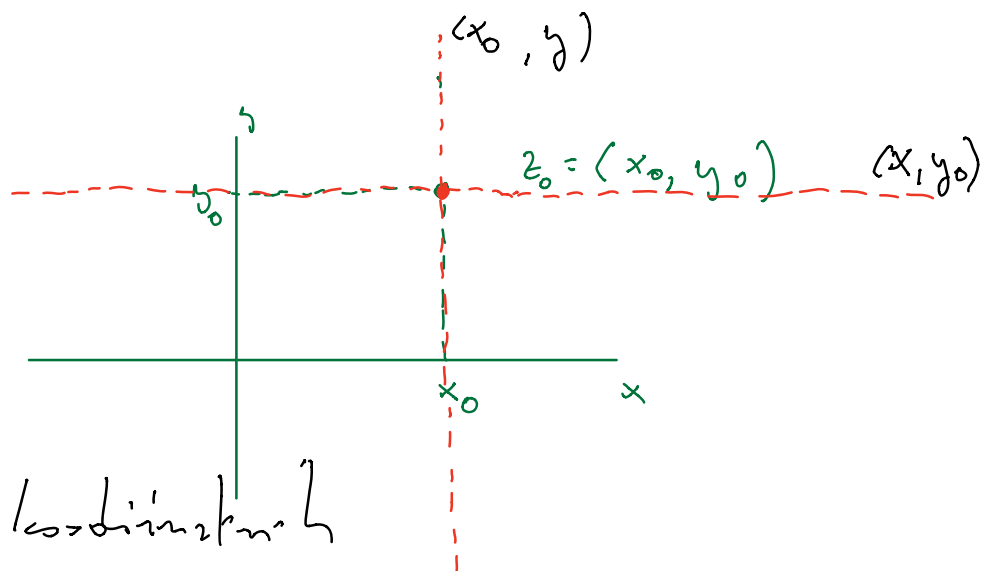
$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ je absolutna vrednost števila z

$$|z| = r.$$

Absolutna vrednost $|z|$ kompleksnega števila z je **razdalja** med štekom z v kompleksni ravnini in izhodiščem kompleksne ravnine.

Točka v ravnini lahko opičujemo z različnimi koordinatnimi sistemi.

Spoznamo smo že **kartezijski koordinatni sistem**.



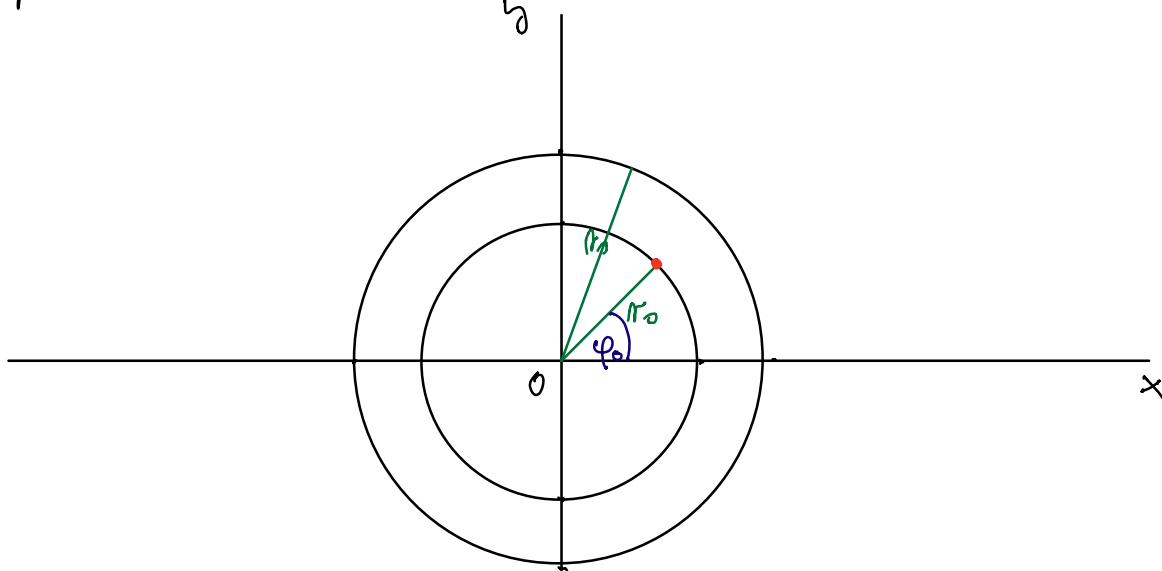
Presečišče koordinatnih krivulj (premic) (x_0, y) in (x, y_0) je točka (x_0, y_0) .

Vsaka točka v ravnini je središče presečišče **matnega** dveh koordinatnih premic (krivulj)

Ali lahko opičujemo kakšen drug par množic koordinatnih krivulj?

Opazujemo vse točke $z \in \mathbb{C}$, z kaže $u|z|$:

$|z| = r_0$ - r_0 nelo izbrano in fiksirano pozitivno realno število



Vse te točke v ravnini ležijo na nekakšno
enemu krogu, ki ima središče v izhodišču.

Rešimo, da smo izbrali nelo točko z v
ravnini. Najprej pogledamo, kakšnja je
njena oddaljenost od izhodišča. Tako bomo
lahko, z središčem v izhodišču, na kakšen

leži naše točka. Je li moguće reći da je O enale π_0 , je to kraj z radijom π_0 .

bede, na katerem kraju leži mi daj.
Pozdrili moramo se, z katero točko tega
kroga gre. To lahko storimo tako, da
izmerimo kot, ki ga premer $\partial - z$ obkroži
z abscisom $(x) - x_0$.

Obkroži dve števili (π_0, φ_0) . Očitno je
s tem dve števili, ki se naše točke
natančno potona (opisna).

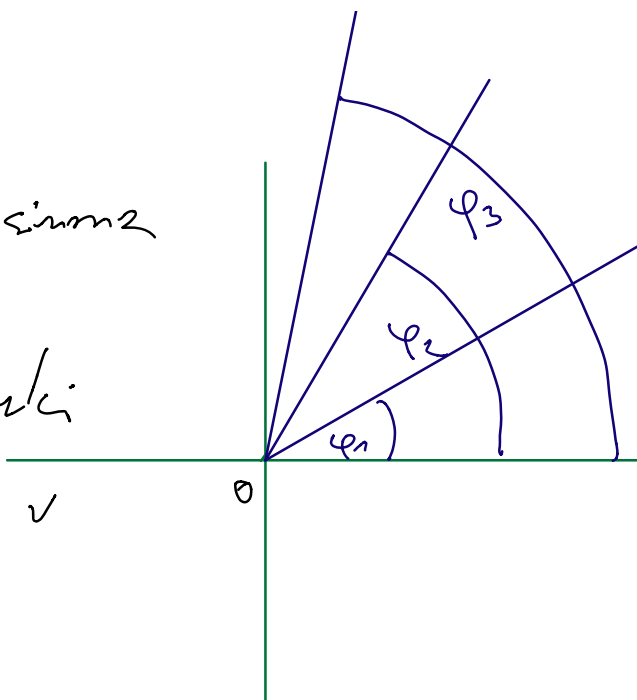
Imamo dve različni koordinatni krivulji.

1.) (π_0, φ)
 $\nearrow$ fiksirane $\nwarrow$ se spreminjata

Ta so kraj s središčem O .

2.) (r, φ_0)
 $\nearrow$ se spemina
 $\nwarrow$ fiksimas

Drupe druzina s poltrici
 z ednim oglicem v
 izhodišču.



Ti dve druzini sestajata **polarni koordinatni sistem**.

Kartezijni koordinatni sist. (x, y) ; $x, y \in \mathbb{R}$

Polarni koordinatni sist. (r, φ) ; $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$
 $\varphi \in [0, 360^\circ)$

Videle bums; kompleksne šķērsi jo reālskait
zē smiešanos potrijoli s pomočjo *plannih*
koordinat.