Matrike, 2. del

Karakterizacije obrnljivih matrik

Pravimo, da je kvadratna matrika **obrnljiva**, če ima inverz. Dokazali bomo, da je obrnljivost ekvivalentna mnogim drugim lastnostim matrike.

Vsako $n \times n$ matriko A lahko zapišemo kot $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$, kjer so $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ stolpci matrike A. Potem za vsako $n \times n$ matriko C velja

$$CA = C[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n] = [C\mathbf{a}_1 \dots C\mathbf{a}_n] \tag{1}$$

in za vsak (stolpčni) vektor $\mathbf{x}$ velja

$$A\mathbf{x} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n. \tag{2}$$

Formuli (1) in (2) bomo večkrat potrebovali v nadaljevanju.

Trditev 1

- Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki zadošča $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, velja $\mathbf{x} = 0$.
- Stolpci matrike A so ogrodje natanko tedaj, ko za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Dokaz: Spomnimo se, da so stolpci matrike A **linearno neodvisni**, če za vsake $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ki zadoščajo $x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = 0$, velja $x_1 = \ldots = x_n = 0$. S pomočjo formule (2) to zapišemo takole: Za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki zadošča $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, velja $\mathbf{x} = 0$.

Spomnimo se, da so stolpci matrike A **ogrodje**, če za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstajajo taki $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, da velja $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$.
S pomočjo formule (2) to zapišemo takole: Za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Trditev 2

Naj bo A poljubna $n \times n$ matrika in C poljubna obrnljiva $n \times n$ matrika.

- Če so stolpci matrike A linearno neodvisni, potem so tudi stolpci matrike CA linearno neodvisni.
- Če so stolpci matrike A ogrodje, potem so tudi stolpci matrike CA ogrodje.

Dokaz: Recimo, da so stolpci matrike A linearno neodvisni, se pravi, da iz $A\mathbf{x} = 0$ sledi $\mathbf{x} = 0$. Radi bi pokazali, da so potem tudi stolpci matrike CA linearno neodvisni, se pravi, da iz $CA\mathbf{x} = 0$ sledi $\mathbf{x} = 0$. Iz $CA\mathbf{x} = 0$ sledi $A\mathbf{x} = C^{-1}(CA\mathbf{x}) = C^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, torej je res $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Pokažimo še drugi del. Recimo, da so stolpci matrike A ogrodje. Torej za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $A\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{b}$. Če pomnožimo s C, dobimo, da za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $CA\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Torej so stolpci matrike CA res ogrodje.

Trditev 3

Če je kvadratna matrika A reducirana vrstična stopničasta forma, potem so naslednje trditve ekvivalentne:

1. Stolpci A so linearno neodvisni.
2. Stolpci A so ogrodje.
3. A je identična matrika.

Dokaz: Očitno iz točke 3 sledita točki 1 in 2. Pokažimo še, da iz negacije točke 3 sledita negaciji točk 1 in 2.

Če kvadratna vrstična kanonična forma ni identiteta, potem ima stopnico, ki je daljša od 1. Ker je stolpec, ki je na drugem mestu v neki stopnici, linearna kombinacija prejšnjih stolpcev, stolpci take matrike niso linearno neodvisni.

Po drugi strani iz obstoja stopnice, ki je daljša od 1, sledi, da stopnišče ne pride do zadnje vrstice. Zadnja vrstica je torej ničelna. Linearna ogrinjača stolpcev torej ne vsebuje vektorjev, ki imajo zadnjo komponento neničelno. Stolpci matrike A zato niso ogrodje.

Posledica 1

Za vsako kvadratno matriko A so ekvivalentne trditve:

1. Stolpci A so linearno neodvisni.
2. Stolpci A so ogrodje.
3. Matrika A je produkt elementarnih matrik.

Dokaz: Ker ima identična matrika linearno neodvisne stolpce in ker so elementarne matrike obrnljive, ima po Trditvi 2 tudi produkt elementarnih matrik linearno neodvisne stolpce. Torej iz točke 3 sledi točke 1. Podobno dokažemo, da iz točke 3 sledi točka 2.

Dokažimo sedaj, da iz točke 1 sledi točka 3. Dokaz, da iz točke 2 sledi točka 3 je podoben. Po Gaussovem algoritmu obstajajo take elementarne matrike $E_1, \ldots, E_k$, da je $A' := E_k \cdots E_1 A$ reducirana vrstična stopničasta forma. Če so stolpci A linearno neodvisni, so po Trditvi 2 tudi stolpci A' linearno neodvisni. Po Trditvi 3 sledi, da je $A' = I$. Ker so E_i obrnljive matrike, sledi $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Ker je inverz elementarne matrike elementarna matrika, je torej A produkt elementarnih matrik.

Dokažimo še naslednjo posledico:

Posledica 2

Za vsako kvadratno matriko A so ekvivalentne trditve:

1. A je obrnljiva.
2. Obstaja taka matrika B, da je $AB = I$.
3. Stolpci A so ogrodje.

Dokaz: Očitno iz točke 1 sledi točka 2. Po Posledici 1 iz točke 3 sledi točka 1, saj je produkt elementarnih matrik obrnljiva matrika.

Dokažimo še, da iz točke 2 sledi točka 3. Po Trditvi 1 je dovolj dokazati, da za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Lahko vzamemo kar $\mathbf{x} = B\mathbf{b}$.

Povzemimo vse rezultate v naslednji izrek:

Izrek o karakterizaciji obrnljivih matrik

Za vsako kvadratno matriko A so ekvivalentne trditve:

1. A je obrnljiva.
2. Obstaja taka matrika B, da je $AB = I$.
3. Stolpci A so ogrodje.
4. Za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
5. Stolpci A so linearno neodvisni.
6. Za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki zadošča $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, velja $\mathbf{x} = 0$.
7. A je produkt elementarnih matrik.
8. Vrstična kanonična forma za A je identiteta.

V Posledici 3 bomo dodali še točke 9 - 12. V poglavju o determinantah bomo pokazali še točko 13: A je obrnljiva natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

Trditev 4

Transponiranka obrnljive matrike je obrnljiva matrika.

Dokaz: Če je A obrnljiva, potem je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, odkoder sledi $(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I^T = I$. Torej je A^T obrnljiva in velja $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Če uporabimo izrek na matriki A^T namesto A in če upoštevamo Trditev 4, potem dobimo naslednjo posledico:

Posledica 3

Za vsako kvadratno matriko A so ekvivalentne trditve:

1. A je obrnljiva.
9. A^T je obrnljiva.
10. Obstaja taka matrika B, da je $BA = I$.
11. Vrstice A so ogrodje.
12. Vrstice A so linearno neodvisne.

Determinante

Definicija determinante

Vsaki kvadratni matriki A bomo priredili realno število $\det A$, ki mu pravimo **determinanta** matrike A. Povedali bomo, kako izračunamo determinante matrik velikosti 1×1 in kako se determinante matrik velikosti $n \times n$ izražajo z determinantami matrik velikosti $(n-1) \times (n-1)$. Potem bomo znali izračunati determinanto matrik poljubne velikosti.

Najprej definirajmo determinanto za matrike velikosti 1×1.

$$\det [a] = a.$$

Za vsako matriko A velikosti $n \times n$ in za vsak $i, j = 1, \ldots, n$ označimo z $A_{i,j}$ matriko velikosti $(n-1) \times (n-1)$, ki jo dobimo tako, da v matriki A zbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec. Definirajmo

$$\det A = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{1,2} \det A_{1,2} + a_{1,3} \det A_{1,3} - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \det A_{1,n}.$$

Na kratko to zapišemo s formulo $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1,i} \det A_{1,i}$.

Primer - determinata 2×2 matrike

Izpeljimo formulo za determinante matrik velikosti 2×2. Če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix},$$

potem je $A_{1,1} = [a_{2,2}]$ in $A_{1,2} = [a_{2,1}]$. Po definiciji determinant matrik velikosti 1×1 je $\det A_{1,1} = a_{2,2}$ in $\det A_{1,2} = a_{2,1}$. Zato velja

$$\det A = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{1,2} \det A_{1,2} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Primer - determinata 3×3 matrike

Izpeljimo še formulo za determinanto 3×3 matrike. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Potem je

$$\det A = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{1,2} \det A_{1,2} + a_{1,3} \det A_{1,3}$$

kjer je

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A_{1,3} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}.$$

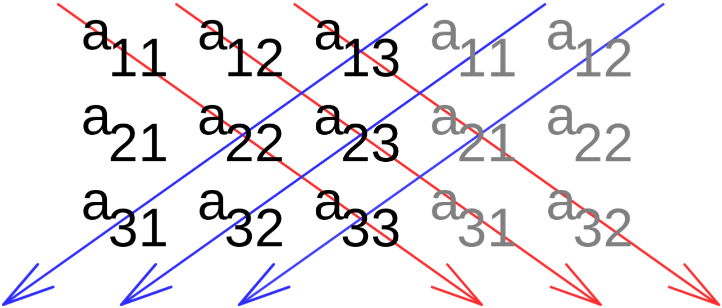
Po formuli iz prejšnjega primera je

$$\begin{aligned} \det A_{1,1} &= a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}, \\ \det A_{1,2} &= a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}, \\ \det A_{1,3} &= a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}. \end{aligned}$$

Zato velja

$$\begin{aligned} &\det A = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}. \end{aligned}$$

Formulo za determinanto 3×3 matrike si zapomnimo s Sarrusovim pravilom:



Najprej k matriki pripišemo njena prva dva stolpca. Vsaka od šestih puščic predstavlja produkt treh elementov, ki jih prečka. Rdeče puščice upoštevamo s pozitivnim predznakom, modre pa z negativnim predznakom.

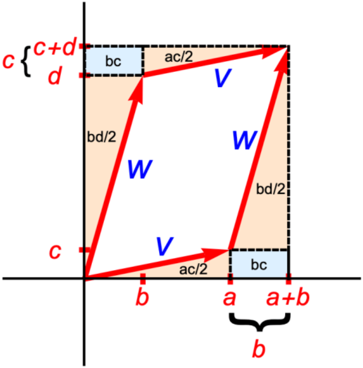
Opomba: Sarrusovo pravilo **ne** velja za 4×4 in večje determinante.

Geometrijski pomen determinante

Absolutna vrednost determinante

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

je enaka ploščini paralelograma, ki ga razpenjata stolpca te determinante.



Paralelogram, ki ga razpenjata vektorja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ in $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ ima ploščino

$$(a+b)(c+d) - 2bc - 2\frac{ac}{2} - 2\frac{bd}{2} =$$

$$= ad - bc = \det A.$$

Če bi $\mathbf{w}$ ležal na drugi strani $\mathbf{v}$ bi dobili $bc - ad = -\det A$. Predznak $\det A$ je torej povezan z orientacijo $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$.

Determinanta 3×3 matrike s stolpci $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ je enaka

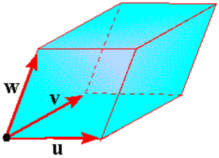
$$u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - v_1(u_2w_3 - u_3w_2) + w_1(u_2v_3 - u_3v_2)$$

kar je enako mešanemu produktu

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3.$$

Vemo, da je absolutna vrednost mešanega produkta $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ enaka volumnu paralelepipeda, ki ga razpenjajo vektorji $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Torej je

$$|\det \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}| \quad = \quad \text{volumen}$$



Opomba: Predznak $\det \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$ je povezan z orientacijo vektorjev $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Če zadoščajo pravilu desnega vijaka, je predznak pozitiven.

Razvoj determinante po vrstici ali stolpcu

Brez dokaza povejmo naslednji formuli.

Izrek o razvoju determinante

Če je A matrika velikosti $n \times n$, potem za poljubna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ veljata naslednji formuli:

- formula za razvoj $\det A$ po i-ti vrstici

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A_{i,k};$$

- formula za razvoj $\det A$ po j-tem stolpcu

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A_{k,j}.$$

Formula za razvoj po prvi vrstici se ujema z definicijo determinante.

Ponavadi razvijemo determinanto po tisti vrstici ali stolpcu, ki vsebuje največ ničel, saj to najbolj skrajša računanje.

Primer

Izračunajmo determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

z razvojem po prvem stolpcu. Velja

$$\det A = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 - 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) = 2.$$