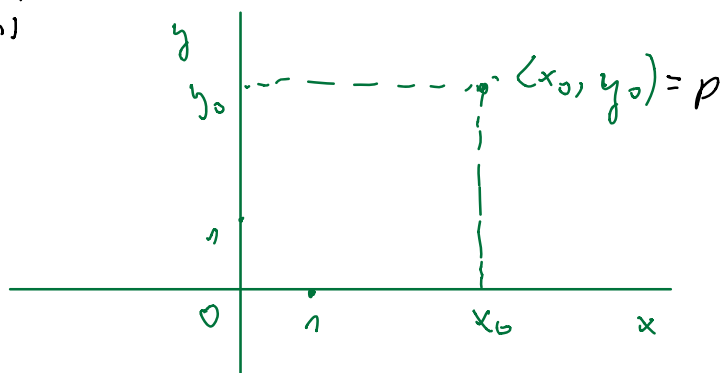


Kompleksne število - polarni zapis

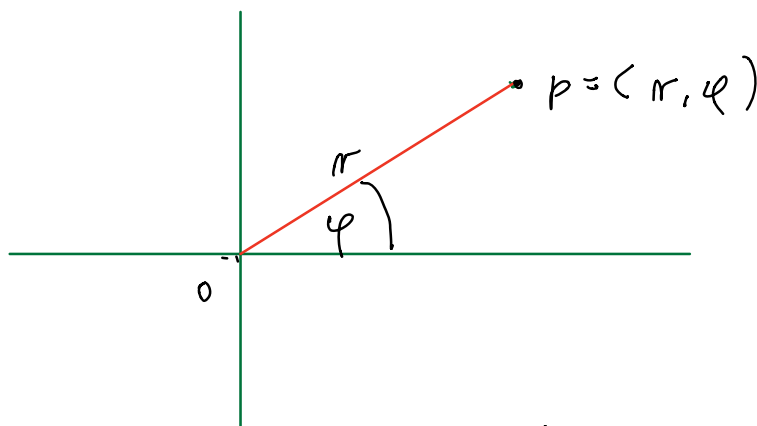
Spominimo se: Točke v ravnini lahko s pomočjo različnih koordinatnih sistemov opisujemo s pari realnih števil.

Spoznali smo dva koordinatna sistema:

1.) Kartezijski

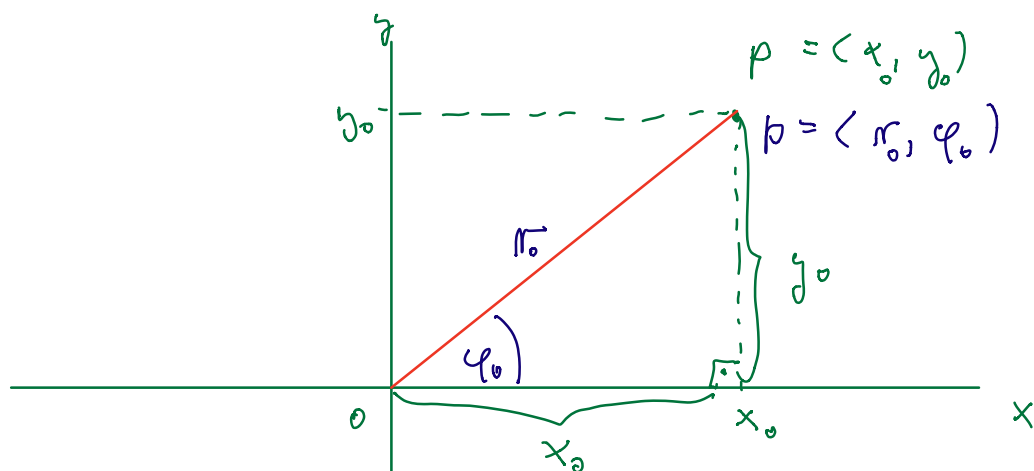


2.) Polarni



Obstaja mnogo različnih koordinatnih sistemov.

Povezje med kartezičnim in polarim koordinatnim sistemom



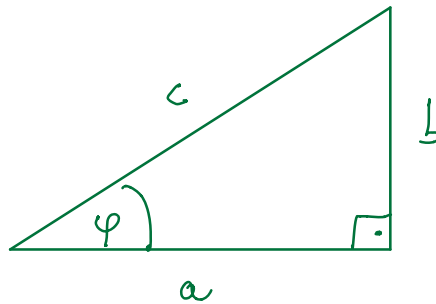
Poštevmo točko med pravimi koordinat (x_0, y_0) in (r_0, φ_0)

Po Pitagorinem izreku dobimo

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$$

$$r_0 = +\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Za izračun φ_0 s (x_0, y_0) se uporabimo funkciji $(\tan, \arctan)$ tangens.



$$\frac{b}{a} = \tan(\varphi) \quad \text{To je definicija tangensa kuta } \varphi$$

Iz definicije tangensa vidimo:

$$\tan(\varphi_0) = \frac{y_0}{x_0} \quad (1)$$

Spremnimo se pojmu **inverzne funkcije**.

Naj bo: $f: [a, b] \longrightarrow [c, d]$

bijektivna funkcija. Funkcija

$$g: [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

je funkciji f **inverzna funkcija**, čiji je:

$$g(y) = x \iff f(x) = y$$

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{f} & [c, d] \\ x & \xrightarrow{\quad} & y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xleftarrow{g} & [c, d] \\ x & \xleftarrow{\quad} & y \end{array}$$

Spostavimo se: Inverzne funkcije
funkcija tangens je funkcija arcs tangens.

Torej: Funkcija arktan je postane s
predpisom:

$$\arctan(y) = x \iff \tan(x) = y$$

kam, kdati:

$$\tan: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\arctan: \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Uporabimo funkcije $\arctan$ in obli
 stanele formule (1):

$$\tan(\varphi_0) = \frac{y_0}{x_0} \quad / \cdot \arctan$$

$$\arctan(\tan(\varphi_0)) = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

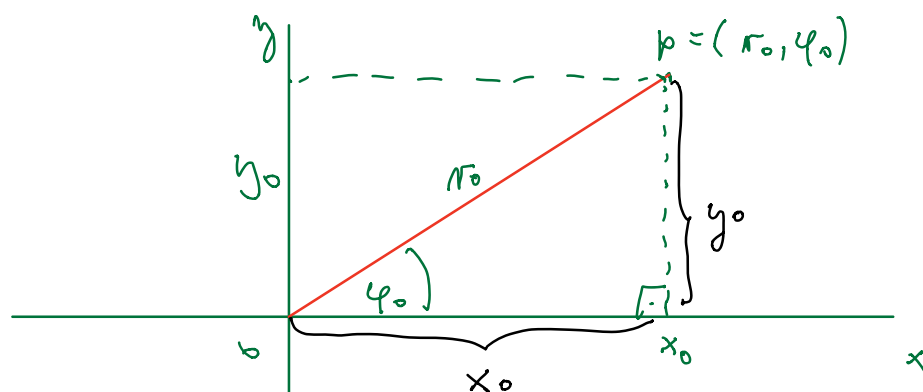
$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

Torej, ob polarni koordinati r_0 in φ_0
 smo izrazili s kartezijanskimi koordinatama.

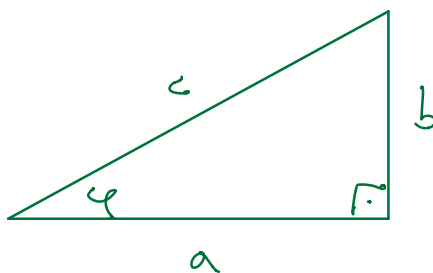
$$r_0 = +\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

Ozglejmo si še obratno pot: Denimo, da poznamo polarni koordinati. Radi bi izrazili kartezijske koordinate (iste črke)



Spomnimo se na funkciji $\cos$ in $\sin$



$$\cos(\varphi) = \frac{a}{c}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{c}$$

Torej, lahko

$$\cos(\varphi_0) = \frac{x_0}{r_0}$$

$$\sin(\varphi_0) = \frac{y_0}{r_0}$$

Torej,

$$x_0 = r_0 \cos(\varphi_0)$$

$$y_0 = r_0 \sin(\varphi_0)$$

Preverimo še enkrat

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ker so kompleksna števila v bijektivni
korespondenci s točkami (Gaussove) ravnine,
jih lahko zapisujemo bodisi s kartezijanskimi
ali pa s polarnimi koordinatami

$$z = x + iy \quad (x, y)$$

$$z = (r, \varphi)$$

Iz tega se, če je z razčlenjeno, že upoštevno
obezna zapisati zlahka dajo:

Imamo:

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

Torej:

$$z = x + iy$$

$$z = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$$

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Uporabljamo polarnezi zapis kompleksnih števil:

Produkt kompleksnih števil z_1, z_2 zapisujemo s pomočjo znanj iz "mehanike" zvezi.

$$z_1 = r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$$

$$z_2 = r_2 (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) \cdot r_2 (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 ((\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)) \\ &\quad + i (\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_1) + \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2))) \end{aligned}$$

Formuli za realno in imaginarno komponento preprosto lahko odčitamo izreda za $\cos$ in $\sin$

Számítás az addíciós képletek izrekör:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Tétel:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Összefoglalás: Abszolútus értéket és kerek komplex számok szorzata

$$w = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

és ezáltal $|w| = 1$.

Bevezetés:

$$|w|^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

Torej:

$$|z_1 \cdot z_2| = |r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))|$$

$$\stackrel{(2)}{=} |r_1 \cdot r_2| |\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)| =$$

$$= |r_1 \cdot r_2| \cdot 1 =$$

$$= |r_1| \cdot |r_2| = r_1 \cdot r_2$$

Torej:

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2$$

Na drugi strani $|z_1| = r_1$ $|z_2| = r_2$

Torej:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Abs

Opomba: Pri zgozjenem računu smo uporabili enačbo

$$\stackrel{(2)}{|r(x+iy)|} = |r| |x+iy|$$

Res:

$$\begin{aligned}
 |r(x+iy)|^2 &= |rx + i ry|^2 = \\
 &= (rx)^2 + (ry)^2 = r^2 x^2 + r^2 y^2 = \\
 &= r^2 (x^2 + y^2)
 \end{aligned}$$

Teg:

$$|r(x+iy)| = r(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r|x+iy|$$

Ogledajmo še enkrat formulo:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Videli smo: $|z_1 z_2| = r_1 r_2$. Kot, ki
prihaja $z_1 z_2$ pa je očitno enak $\varphi_1 + \varphi_2$.

Torej: za kotni koordinati predstavljajo kompleksnih
število z_1 in z_2 ref₂:

$$\text{kot}(z_1 \cdot z_2) = \text{kot}(z_1) + \text{kot}(z_2)$$

Terminologija: Kot φ kompleksnega števila

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

se imenuje **argument kompleksnega števila**.

Pisano:

$$\varphi = \arg(z)$$

Imamo tudi:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Poznamo: z_1 produkt $z_1 z_2$ kompleksnih števil z_1 in z_2 velja:

$$\text{Abs} \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{Arg} \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Opomba: Definiramo, da li uporabljamo z tipa kompleksnih števil **zist polarni zapis**

$$z = (r, \varphi)$$

$$z_1 = (r_1, \varphi_1) \quad z_2 = (r_2, \varphi_2)$$

Polem li enostavno piskli:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$$

Pozor: Formule za izračun vsote $z_1 + z_2$ v zistih polarinih koordinatah nilep.

Zato uporabljamo **hibridni** zapis. V tem tipu je seštevanje in množenje "lepo".

Geometrijski opis množenja kompleksnih števil:

Naj bo

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

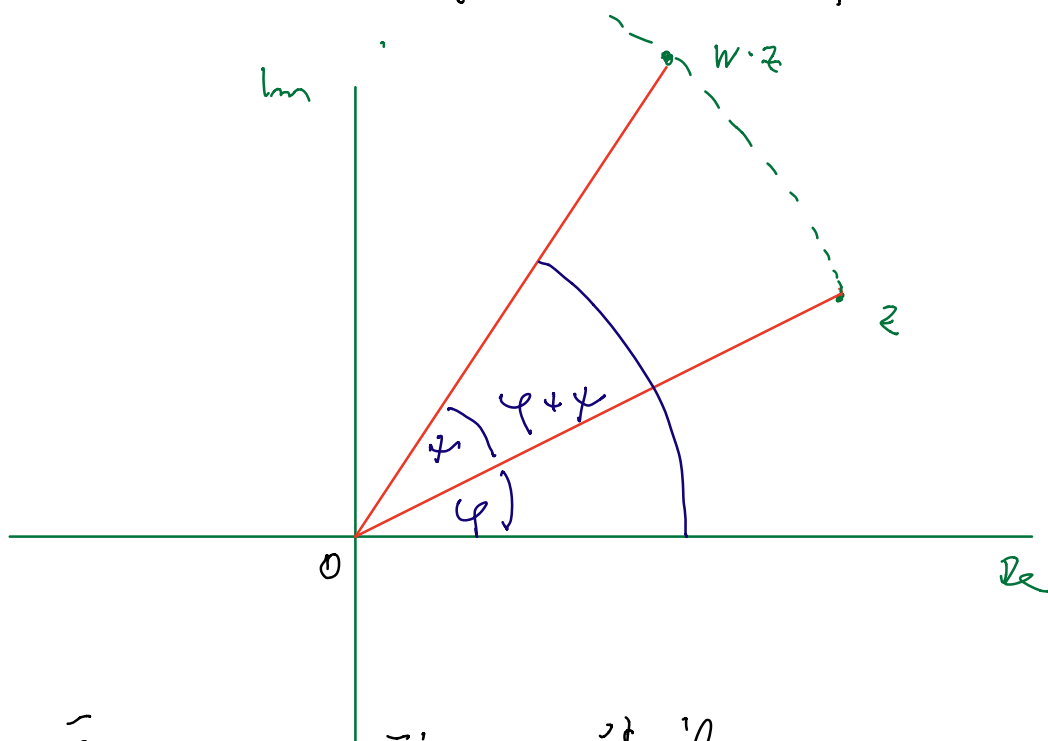
Nājs pēc tā

$$w = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

- tajā mēs v. šķērsu & abs. vērtību 1.

iz pavadīt daļiņu:

$$w \cdot z = r (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$$



Tātad: Ē & pārvēršam šķērsu w ,
kādēļ $|w| = 1$, pārvēršam šķērsu $z \cdot w = w \cdot z$
šķērsu & izskaidrojam ka $\arg(w)$ ir

pozitivno smer.

Pomen brez uporabe množenja v polarnih koordinatah

Hitro vidimo, če množenje večje števila kompleksnih faktorjev je v kartezijskih koordinatah zamudno. Zmudi kar je cel zamuden polnoročaj:

$$z = 3 + i4 \quad z^{100} = ?$$

Ne samo zamudno ampak pravičeno nemogoče pa je korenjenje v kartezijskih koordinatah:

$$z = 3 + i4 \quad \sqrt[2]{z} \quad - \quad \text{cel to ni pravi račun}$$

$$\sqrt[100]{z} \quad - \quad \text{absurdno težak problem.}$$

De Moivreova pravilo

Izrek:

Naj bo

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Je poljubno naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Dokaz: Dokazovali bomo z matematično indukcijo:

$$1.) \quad n = 1.$$

$$z^1 = z$$

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) =$$

$$= r^1 (\cos(1 \cdot \varphi) + i \sin(1 \cdot \varphi)) = z^1 \quad \checkmark$$

$$2.) \quad n \longrightarrow n+1$$

Indukcyjna hipoteza (założenie)

Jeżeli n jest:

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Dokazujemy natomiast, że od tego wynika

$$z^{n+1} = r^{n+1} (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi))$$

Wskazujemy:

$$\underline{z^{n+1} = z \cdot z^n =}$$

$$= r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \cdot r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

$$= r \cdot r^n (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

$$= r^{n+1} (\cos(\varphi + n\varphi) + i \sin(\varphi + n\varphi)) =$$

$$\underline{= r^{n+1} (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi))}$$

□

Primer:

$$z = 3 + i 4$$

$$z^{100} = r^{100} (\cos(100\varphi) + i \sin(100\varphi))$$

Modulus r and φ

$$r = |z| = (3^2 + 4^2)^{\frac{1}{2}} = (9 + 16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \alpha$$

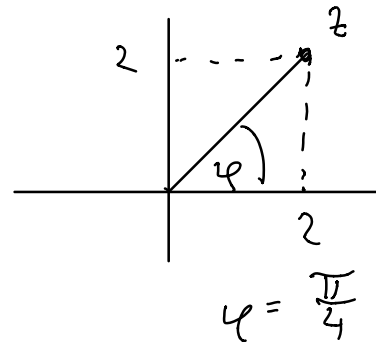
$$z^{100} = 5^{100} (\cos(100\alpha) + i \sin(100\alpha))$$

✓
Se en primer:

$$z = 2 + i 2$$

$$|z| = (4 + 4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$$

$$r = \sqrt{8} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

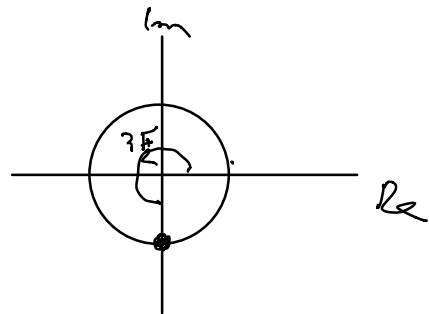


$$\begin{aligned}
 z^{102} &= r^{102} \left(\cos\left(102 \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(102 \frac{\pi}{4}\right) \right) = \\
 &= r^{102} \left(\cos\left(\frac{102 \pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{102 \pi}{4}\right) \right) = \\
 &= r^{102} \left(\cos\left(25 \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(25 \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
 &= r^{102} \left(\cos\left(24\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(24\pi + \frac{3}{2}\pi\right) \right) \\
 &= r^{102} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$= (\sqrt{8})^{102} \cdot (-i) =$$

$$= 8^{51} \cdot (-i) =$$

$$= \underline{-i 8^{51}}$$



Korenjenje kompleksnih števila:

Takoj operacija, ki jo bomo koordinate v koordinatni koordinatni težje problem:

Poskušamo izraziti števila:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right)} = ?$$

knha h' e k'p h'ili v kartezi'ih korol: ?

l'sano komplekso stailo $z = x + iy$, z^3

knano refz:

$$z = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right)}$$

$$z^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$(x + iy)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$x^3 + i 3x^2y - 3xy^2 - i y^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$(x^3 - 3xy^2) + i (3x^2y - y^3) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

Ostano **melixxen** sisten olch an'el k

metan/ki x, y

$$x^3 - 3xy^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3x^2y - y^3 = \frac{1}{2}$$

Ta sistēmā jā pretēzē.

Itāz rādams, dz sē jē dēti bēfē lēti
konejēnē s pamoējē De Moirēnēz pamoēn.

Splōsno:

$$\text{Mij } b_0 \quad \alpha = a + ib$$

$$\alpha = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

neko pamoēnē ētēnē. Pamoēnē mēti

kone iz α : Tēzēj i ēzēnē

$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, z kēlēzē rēfē,

$$z = \sqrt[n]{\alpha}$$

ad fēd

$$z^n = \alpha$$

Upmōēnē pamoēnē zēpē s in De Moirēnēz pamoēnē

$$r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = s (\cos(\psi) + i \sin(\psi))$$

6 glz dve ex. števili enaki, sta njuni abs.
vrednosti enaki:

$$r^n = s \quad s > 0$$

$$r = +\sqrt[n]{s}$$

Seveda po refz tudi: argumenti morata
biti enaka. Torej

$$n\varphi = \psi$$

$$\varphi = \frac{\psi}{n}$$

Torej:

$$z = \sqrt[n]{s} \left(\cos\left(\frac{\psi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\psi}{n}\right) \right)$$

je n-ti koren števila $\alpha = s(\cos(\psi) + i \sin(\psi))$

Tod2: to ni edini m-ti koren.