

Determinante

A : kvadratna matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

lastnost: stolpci oz. vrstice A lin. nezav. $(\Rightarrow) \det A \neq 0$

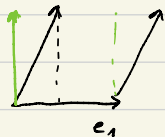
$$(i) \quad A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = B$$

$$\det A = \lambda \cdot \det B \quad (\text{če vrstico pomnožim z } \lambda, \text{ se } \det. \text{ pomnoži z } \lambda)$$

$$(ii) \quad A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} + \lambda a_{11} & \dots & a_{11} + \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = B$$

$$\det A = \det B$$

Gaussova eliminacija ne spremeni
determinante



(iii) $\det A = \det A^T$

A^T : stolpci A so vrstice A^T

(iv) formula za razvoj: (po i -ti vrstici)

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \boxed{a_{i1}} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot (-1)^{(i+1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{i2} (-1)^{(i+2)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,3} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,3} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ a_{in} (-1)^{(i+n)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n-1} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

Opazimo: če v determinanti zamenjamo vrstici, determinanta menja znak.

Primer: Izračunaj determinantu:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 6 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 = 16$$

$$2 \times 2: \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Izračunaj:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$

Nauk! Če ji matrica zgorajjelelema, ji determinanta produkt diagonalcev.

bracunaj :

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot (-1)^6 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

Opcija: vrstko s 5 spustimo na dno: 4 transp.

2 spustimo na pred. mesto: 3 transp.

1 izvignemo na 1. mesto: 1 transp.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

bracunaj

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & 2 & -i-1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -i-1 & -2 & i-1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n-1 & 2 & n-1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

bracunaj:

$$\begin{vmatrix} \textcircled{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\det A_6}{=} 2 \cdot \det A_5 - 1 \cdot \det A_4 =$$

gauss

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{A_4}{=}$$

$$= 2 \cdot \det A_5 - \det A_4$$

$$a_n = \det A_n$$

$$\lambda^2 = 2 \cdot 1 - 1 \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0; \quad \lambda = 1: \text{du. nula!} \quad a_n = a \cdot (1)^n + p \cdot a \cdot (1)^n$$

$$a_{n+2} = 2 a_{n+1} - a_n$$

$$a_1 = 2$$

$$a_1, a_2 \Rightarrow a_3 \Rightarrow a_4$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$a_6 = 2 \cdot a_5 - a_4 = 2 \cdot (2 \cdot a_4 - a_3) - a_4 =$$

$$= 3 \cdot a_4 - 2 a_3 =$$

$$= 3 \cdot (2 \cdot a_3 - a_2) - 2 \cdot a_3 = 4 a_3 - 3 a_2 =$$

$$= 4(2a_2 - a_1) - 3a_2 = 5a_2 - 4a_1 = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 7$$

Matrice in operacije na matrikah

Matrica je $m \times n$ shema števil: m vrstic, n stolpcev.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. indeks: vrstica
2. indeks: stolpec

1 skalar: $1 \cdot A$: množim vsak element A z 1

Sestavimo lahko matrice, ki so enako velike: $A: m \times n$, $B: m \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

sest. istočasne
elemente

Množenje matrik:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{levar.}} \\ \downarrow \text{desnar.} \end{array} \begin{matrix} m \times n & n \times k \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -7 & -8 \end{bmatrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4), & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-7), & 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-8) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4), & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-7), & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-8) \\ 4 \cdot (-1) + 5 \cdot (-4), & 4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-7), & 4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-8) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = C$$

$$A: m \times n; B: n \times k$$

$$C = m \times k$$

Skal. produkti i -te mste A in j -tega stolpca B zapisemo na mesto i, j matrice C .

Primer: Naj bo dana matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pisati tako matrico B , da bo

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 1 \cdot a + 2c & b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}: \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}: \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L^{-1}(2) \\ \searrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{alg.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & a & b \\ 0 & 1 & | & c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{(-2/3)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \sim \\
 & \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \\
 & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_B
 \end{aligned}$$

$$\text{DN: } I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_n \qquad I^2 = I$$

l'računaj potence matice: ($k=1,2,3,4$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Test: 27. 11; vekt. prostori (baze), determinanta, množenje matic