

*Obravnavaj konvergenco vrste  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$*

Divergentna vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  je minoranta za vrsto  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ .

*Obravnavaj konvergenco vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$*

Uporabimo npr. korenski kriterij.

$$\sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt[n]{2^{n-1}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1,$$

saj je  $1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n-1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n} = 1$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n-1}{n}} = 2$ .

Sklep: vrsta konvergira.

*Obravnavaj konvergenco vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n^2)!}$*

$$\frac{n^n}{(n^2)!} = \frac{n^n}{n^2(n^2-1)(n^2-2) \cdots (n+1)n!} \leq \frac{1}{n!},$$

saj je  $n^2(n^2-1)(n^2-2) \cdots (n+1)$  produkt  $n^2 - n \geq n$  števil, ki so vsa velikosti vsaj  $n$ .

*Naj za zaporedji realnih števil  $(a_n)_n$  in  $(b_n)_n$  velja, da vrsti  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  konvergirata. Dokaži, da vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  absolutno konvergira!*

Za vsak  $n$  velja  $|a_n| \geq |b_n|$  ali  $|a_n| \leq |b_n|$ . V prvem primeru je  $|a_n b_n| \leq a_n^2$ , v drugem pa  $|a_n b_n| \leq b_n^2$ . Računamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1, |a_n| \geq |b_n|}^{\infty} |a_n b_n| + \sum_{n=1, |b_n| > |a_n|}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$$

*Za katere  $a \in \mathbb{R}$  konvergira vrsta  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a+7)^n}{15^n \ln n}$ ?*

Če je  $|\frac{(a+7)}{15}| < 1$ , vrsta absolutno konvergira, v kar se lahko prepričamo denimo s korenskim kriterijem.

Če je  $|\frac{(a+7)}{15}| > 1$ , vrsta divergira, v kar se lahko prepričamo prav tako s korenskim kriterijem ( $R := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , iz česar sledi, da zaporedje  $(a_n)_n$  ne konvergira proti nič, torej vrsta divergira).

Če je  $\frac{(a+7)}{15} = 1$ , je vrsta enaka znani divergentni vrsti  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ .

Če je  $\frac{(a+7)}{15} = -1$ , vrsta ne konvergira absolutno (glej zgoraj), konvergira pa pogojno po Leibnizovem kriteriju.

Sklepamo lahko torej, da vrsta absolutno konvergira natanko tedaj za  $a \in (-22, 8)$ , za  $a = -22$  pogojno konvergira, sicer pa divergira.

Sklepajmo, da vrsta konvergira za  $a = 1$

- (1) *Naj bo  $(a_n)_n$  padajoče zaporedje pozitivnih realnih števil. Pokaži, da vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira natanko tedaj, ko konvergira vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$*
- (2) *S pomočjo zgornjega rezultata obravnavaj konvergenco vrst  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ .*

Rešitev prve točke: zapišimo prvih nekaj členov vsote  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ :

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + \cdots \\ \geq & a_1 + a_3 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + \cdots \end{aligned}$$

Pri neenakosti upoštevamo dejstvo, da je zaporedje  $(a_n)_n$  padajoče zaporedje. Če je  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$ , sledi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ . Tako smo pokazali smer ( $\Leftarrow$ ). Smer ( $\Rightarrow$ ) pokažemo podobno, le da vrsto  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  primerjamo z manjšo vrsto  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^k}$ .