Dokaži, da je zaporedje $(a_n)_n$ navzgor neomejeno in naraščajoče, kjer je:

(1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$

(2) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

1) Pokažimo, da je zaporedje $(a_n)_n$ navzgor neomejeno. a_n je vsota $n+1$ členov, ki so po velikosti vsi večji ali enaki $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Naredimo lahko oceno $a_n \geq \frac{n+1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, in ker je zaporedje $(\sqrt{n})_n$ navzgor neomejeno, to velja tudi za zaporedje $(a_n)_n$. Preostane nam, da pokažemo še, da je naraščajoče. Videti želimo, da velja $a_{n+1} \geq a_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Izračunamo

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \geq a_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{2}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0.
\end{aligned}$$

Torej je res $a_{n+1} \geq a_n$.

2) Najprej pokažimo, da je $a_{n+1} \geq a_b$ oz. $\sqrt[n+1]{(n+1)!} \geq \sqrt[n]{n!}$. Toda

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n+1]{(n+1)!} \geq \sqrt[n]{n!} \\
\Leftrightarrow &[(n+1)!]^n = (n+1)^n (n!)^n \geq (n!)^{n+1} \\
\Leftrightarrow &(n+1)^n \geq n!
\end{aligned}$$

Torej je zaporedje res naraščajoče. Pokažimo še, da je navzgor neomejeno. Pa recimo, da ni, torej da obstaja $M \in \mathbb{N}$, da je $a_n = \sqrt[n]{n!} < M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, oziroma, ekvivalentno, $\frac{n!}{M^n} < 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Vidimo, da je za vsak $n \geq M$:

$$\frac{n!}{M^n} = C \cdot \frac{M+1}{M} \cdot \frac{M+2}{M} \cdots \frac{M+3}{M} \cdots \frac{n}{M},$$

kjer je $C := \frac{1}{M} \cdot \frac{2}{M} \cdots \frac{M-1}{M} \frac{M}{M}$ konstanta. Ker je zaporedje $(\frac{M+1}{M} \cdot \frac{M+2}{M} \cdots \frac{M+3}{M} \cdots \frac{n}{M})_n$ navzgor neomejeno, neenakost $\sqrt[n]{n!} < M$ ne velja za vse n.

Naj bo $(a_n)_n$ omejeno zaporedje, $(b_n)_n$ pa zaporedje z limito nič. Pokaži, da ima zaporedje $(a_n b_n)_n$ limito nič.

Pokazali bomo, da ima zaporedje $(|a_n b_n|)_n$ limito nič, iz česar bo takoj sledillo, da ima zaporedje $(a_n b_n)_n$ isto limito. Ker je zaporedje $(a_n)_n$ omejeno, to velja tudi za zaporedje $(|a_n|)_n$, torej obstaja $M \in \mathbb{N}$, tak, da je $0 \leq |a_n| \leq M$. Če pomnožimo vse strani vse neenakosti z $|b_n|$, dobimo $0 \leq |a_n b_n| \leq M|b_n|$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker $zaporedje(M|b_n|)_n$ konvergira proti nič, to po pravilu o sendviču velja tudi za zaporedje $(|a_n b_n|)_n$.

Izračunaj limite zaporedij!

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2\sqrt{n^2+1}-n^3)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{n+3}-n$

1)

$$n^2\sqrt{n^2+1}-n^3=n^2(\sqrt{n^2+1}-n)=\frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

Če števec in imenovalec delimo z n^2, vidimo, da zaporedje ne konvergira, saj gre v neskončnost.

2)

$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(1+2+3+\cdots+2n+(2n+1))-2(1+2+3\cdots n)$

$=\dfrac{(2n+1)2n}{2}-2\dfrac{n(n+1)}{2}=n^2.$

Torej je $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{n+3}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+3}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{n+3}=-3$.

Naj bo

$$a_n=(-\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{\sqrt{n+1}}{n})+(-\frac{\sqrt{n+2}}{n}+\frac{\sqrt{n+3}}{n})+\cdots+(-\frac{\sqrt{n+2n}}{n}+\frac{\sqrt{n+2n+1}}{n}).$$

Izračunaj $\lim_{n\to\infty}a_n$.

Ocenimo vrednost vsakega oklepaja, torej vrednost $-\frac{\sqrt{n+k}}{n}+\frac{\sqrt{n+k+1}}{n}$ za $k=0,2,3,\ldots,2n$.

$$\begin{aligned}-\frac{\sqrt{n+k}}{n}+\frac{\sqrt{n+k+1}}{n}&=\frac{\sqrt{n+k+1}-\sqrt{n+k}}{n}\\&=\frac{1}{n(\sqrt{n+k+1}+\sqrt{n+k})}\leq\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\end{aligned}$$

Za vsak n je število oklepajev enako $n+1$, iz česar sledi, da za vsak n velja $a_n\leq\frac{n+1}{n}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=:b_n$. Ker je $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ in je $a_n\geq 0$ za vsak n, sledi $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Naj bo

$$a_n=\frac{(3n)!}{n!(2n)!2^{3n}}$$

Izračunaj $\lim_{n\to\infty}a_n$. *Namig: Najprej izračunaj* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3(n+1))!n!(2n)!2^{3n}}{(n+1)!(2n+2)!2^{(3n+1)}(3n)!}=\frac{3(3n+2)(3n+1)}{16(2n+1)(n+1)}\to\frac{27}{32}$$

Sledi, da od nekega $N \in \mathbb{N}$ naprej velja $a_{n+1} \leq \frac{28}{32} a_n$ za vse $n \leq N$.

Torej je $0 \leq a_{N+k} \leq (\frac{28}{32})^k a_N$, in ker je $\lim_{k\to\infty}(\frac{28}{32})^k a_n = 0$, velja $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{N+k}$.

Dokaži, da zaporedje s splošnim členom $a_n := \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ (n korenov) konvergira in izračunaj njegovo limito Ogledamo si nekaj prvih členov zaporedja: $a_0, a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \ldots$ in ugotovimo, da med njimi obstaja rekurzivna zveza $a_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Najprej dokažemo, da je zaporedje naraščajoče, torej da velja $a_n + 1 \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To naredimo z indukcijo. Za $n = 0$ je očitno res, naredimo še indukcijski korak: $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+a_{n+1}} = a_{n+2}$, pri čemer uporabimo indukcijsko predpostavko.

Prepričati se moramo še, da je zaporedje navzgor omejeno. Še prej izračunamo kandidata za limito x tako, da na obeh straneh enakosti $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ pošljemo n v neskončnost in dobimo enakost $x = \sqrt{2+x}$. Kandidata za limito sta torej $x_1 = -1$ in $x_2 = 2$. Z drugimi besedami: pokazali smo, da ČE zaporedje $(a_n)_n$ konvergira, potem konvergira bodisi proti -1 bodisi proti 2, toda dokazati moramo, da zaporedje konvergira. Jasno je, da limita zaporedja ne more biti -1, saj so vsi členi pozitivni. Da se prepričamo, da je 2 limita zaporedja, lahko z indukcijo po n pokažemo, da je $a_n \leq 2$ za vsak n. Ker je, kot smo pokazali, zaporedje $(a_n)_n$ naraščajoče in navzgor omejeno, ima limito in ta limita je enaka 2.

Dokaži, da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Očitno je, da je $\sqrt[n]{n} \geq q$ za vsak $n \in N$. Pokazali bomo, da za vsak $\epsilon > 0$ velja $\sqrt[n]{n} < 1+\epsilon$ oz. ekvivalentno, $n < (1+\epsilon)^n$ za vse n od nekje naprej. Spomnimo se na binomski izrek in računamo

$$(1+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \epsilon^k = 1 + n\epsilon + \binom{n}{2}\epsilon^2 + \cdots + n\epsilon^{n-1} + \epsilon^n > \binom{n}{2}\epsilon^2$$

Očitno je, da za dovolj n ne velja $n \geq \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{n-1}{2}\epsilon^2$, saj zaporedje $(\frac{n-1}{2}\epsilon^2)_n$ navzgor neomejeno.

Torej res velja $\sqrt[n]{n} < 1+\epsilon$ za vse dovolj velike n. Z drugimi besedami, pokazali smo, da se za vsak $\epsilon > 0$ v intervalu $(1, 1+\epsilon)$ nahajajo vsi členi zaporedja od nekje naprej. To pa po definiciji pomeni, da je 1 limita zaporedja.