

Analiza 3 — III. poglavje, 9. predavanje

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

III. Poglavje: Sistemi linearnih diferencialnih enačb

V tretjem poglavju predmeta bomo obravnavali sisteme linearnih diferencialnih enačb ter linearne enačbe višjega reda.

V tem predavanju si bomo ogledali naslednje teme.

- 1 Obstoje globalnih rešitev linearnih sistemov
- 2 Liouvilleova formula za linearen sistem
- 3 Homogeni sistemi, fundamentalna rešitev
- 4 Rešitve nehomogenih sistemov

Splošni pojmi

Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval, poltrak, ali $I = \mathbb{R}$. Označimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T && \text{vektor v } \mathbb{R}^n \quad (^T \text{ pomeni transponiranje}) \\ A(t) &= (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n && \text{zvezna matrična } n \times n \text{ funkcija na } I \\ \mathbf{f}(t) &= (f_i(t))_{i=1}^n && \text{zvezna vektorska funkcija na } I.\end{aligned}$$

Neavtonomen, nehomogen sistem linearnih diferencialnih enačb:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad t \in I.$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Prerejen homogen sistem:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad t \in I.$$

Začetni problem:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{za nek } t_0 \in I \text{ in } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Norme matrik

V dokazih bomo uporabljali katerokoli od t.i. **naravnih norm** $\|A\|$ kvadratnih matrik $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, za katere velja:

- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,
- $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$.

Dva naravna primera sta **Evklidska norma**

$$\|A\|_e^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2$$

in **operatorska norma**

$$\|A\|_{op} = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}.$$

Z uporabo Cauchy-Schwarzove neenakosti ni težko videti, da za vsak $i, j = 1, \dots, n$ velja

$$|a_{i,j}| \leq \|A\|_{op} \leq \|A\|_e \leq \sqrt{n} \|A\|_{op}.$$

Odvod matrične funkcije

Odvod matrične funkcije $A(t) = (a_{i,j}(t))$ je definiran po komponentah:

$$\dot{A}(t) = (\dot{a}_{i,j}(t)).$$

Torej je matrična funkcija $A(t)$ odvedljiva natanko tedaj, ko so vse njene komponente $a_{i,j}(t)$ odvedljive.

Podobno je

$$\int_{t_0}^t A(s) ds = \left(\int_{t_0}^t a_{i,j}(s) ds \right)_{i,j=1}^n,$$

to je, integriramo po komponentah. Lahko je preveriti:

$$\frac{d}{dt} (A(t) + B(t)) = \dot{A}(t) + \dot{B}(t),$$

$$\frac{d}{dt} (A(t)B(t)) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t).$$

$$\frac{d}{dt} (A(t)\mathbf{x}(t)) = \dot{A}(t)\mathbf{x}(t) + A(t)\dot{\mathbf{x}}(t).$$

Eksistenčni izrek za sisteme linearnih enačb

Izrek

Naj bo $A(t)$ zvezna matrična funkcija dimenzije $n \times n$ na intervalu $t \in I \subset \mathbb{R}$ (pri čemer je I lahko tudi poltrak ali $\mathbb{R}$) in naj bo $\mathbf{f}(t)$ zvezna funkcija na I z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$. Potem ima za vsak $t_0 \in I$ in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

natanko eno rešitev $\mathbf{x}(t)$ na $t \in I$.

Vsaka rešitev torej obstaja na največjem časovnem intervalu, na katerem so podatki (to je funkciji $A(t)$ in $\mathbf{f}(t)$) zvezni.

Dokaz. Naj bo $I = (\alpha, \omega)$, $-\infty \leq \alpha < t_0 < \omega \leq +\infty$. Iz eksistenčnega izreka vemo, da obstaja natanko ena rešitev problema $\mathbf{x}(t)$ na nekem maksimalnem intervalu $t \in J = (a, b) \subset I$. V kolikor $J \neq I$, velja ena od naslednjih možnosti (glej trditev o maksimalnih intervalih v 8. predavanju):

- $b < \omega$ in $\lim_{t \nearrow b} |\mathbf{x}(t)| = +\infty$.
- $a > \alpha$ in $\lim_{t \searrow a} |\mathbf{x}(t)| = +\infty$.

Dokaz

Denimo, da velja prva možnost. Z integracijo dobimo za vsak $t \in [t_0, b)$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{f}(s))ds$$

in odtod

$$|\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}_0| + \int_{t_0}^b |\mathbf{f}(s)|ds + \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot |\mathbf{x}(s)|ds.$$

Iz Gronwallove leme sledi

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \left(|\mathbf{x}_0| + \int_{t_0}^b |\mathbf{f}(s)|ds \right) e^{\int_{t_0}^b \|A(s)\|ds},$$

za vsak $t_0 \leq t < b$. Torej je funkcija $\mathbf{x}(t)$ omejena v desnem krajišču $t = b$, kar je v protislovju s predpostavko. Zato je $b = \omega$.

Analogen argument pokaže, da spodnja meja a intervala J ne more biti strogo večja od α .

Rešitve homogenega sistema

Trditev

Množica vseh rešitev homogenega linearnega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad t \in I, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

je n -razsežen vektorski podprostor prostora $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ zvezno odvedljivih funkcij $I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Če sta $\mathbf{x}(t)$ in $\mathbf{y}(t)$ dve rešitvi in $a, b \in \mathbb{R}$, potem je

$$\frac{d}{dt}(a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{y}(t)) = a\dot{\mathbf{x}}(t) + b\dot{\mathbf{y}}(t) = aA(t)\mathbf{x}(t) + bA(t)\mathbf{y}(t) = A(t)(a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{y}(t)).$$

Torej je $a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{y}(t)$ spet rešitev enačbe. Zato je množica vseh rešitev

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$$

vektorski podprostor prostora zvezno odvedljivih funkcij $I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Preslikava $\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ je očitno linearna. Po eksistenčnem je izreku je tudi bijektivna, zato je linearni izomorfizem in $\dim \mathcal{R} = n$.

Fundamentalna rešitev homogenega sistema $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$

Označimo z

$$\mathbf{e}^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad k = 1, \dots, n$$

standardno bazo prostora $\mathbb{R}^n$. (Število 1 stoji v $\mathbf{e}^k$ na k -tem mestu.)

Fiksirajmo $t_0 \in I$. Za vsak $k = 1, \dots, n$ naj bo vektorska funkcija

$$\mathbf{x}^k(t) = (x_1^k(t), \dots, x_n^k(t))^T$$

rešitev začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}}^k(t) = A(t)\mathbf{x}^k(t), \quad \mathbf{x}^k(t_0) = \mathbf{e}^k.$$

Matrična $n \times n$ funkcija $X(t) = (\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t))$ tedaj zadošča enačbi

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = \text{Id}$$

kjer je Id identična matrika dimenzije n .

Matrična funkcija $X(t)$ se imenuje **fundamentalna rešitev** dane homogene enačbe, normalizirana pri $t = t_0$.

Izražanje toka s fundamentalno rešitvijo

Naj bo

$$\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T = \sum_{j=1}^n x_j^0 \mathbf{e}^j \in \mathbb{R}^n$$

poljuben vektor v $\mathbb{R}^n$. Tedaj je vektorska funkcija

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{x}^0$$

(produkt matrike $X(t)$ in vektorja $\mathbf{x}^0$) rešitev začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0.$$

Dejansko:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{X}(t)\mathbf{x}^0 = A(t)X(t)\mathbf{x}^0 = A(t)\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = X(t_0)\mathbf{x}^0 = \text{Id} \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0.$$

Torej je tok $\phi_t = \phi_{t,t_0}$ linearnega vektorskega polja $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x}$ enak

$$\phi_t(\mathbf{x}) = X(t)\mathbf{x}.$$

Tok enačbe $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ sestoji iz linearnih izomorfizmov

Iz splošnih lastnosti toka vemo, da je za vsak fiksni t preslikava $\phi_t = \phi_{t,t_0}$ difeomorfizem domene na svojo sliko.

V danem primeru je domena ves prostor $\mathbb{R}^n$ in preslikava ϕ_t je linearna,

$$\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_t(\mathbf{x}) = X(t)\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Zato je ϕ_t linearni izomorfizem na $\mathbb{R}^n$. To pomeni $\det X(t) \neq 0$.

Ker je determinanta zvezna v t in je $\det X(t_0) = \det \text{Id} = 1$, sledi

$$\det X(t) > 0 \quad \text{za vsak } t \in I.$$

EksPLICITNO formulo za $\det X(t)$ dobimo iz Liouvilleove formule.

Najprej opazimo, da je $X(t)$ ravno Jacobijeva matrika linearne preslikave $\mathbf{x} \mapsto X(t)\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{x})$, zato je

$$J(\phi_t) = \det X(t), \quad t \in I.$$

Liouvilleova formula za tok linearnega sistema

Po Liouvilleovi formuli velja

$$J(\phi_t(\mathbf{x})) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{div} \mathbf{F}(s, \mathbf{x}) ds}.$$

Naj bo $A(t) = (a_{ij}(t))$. Vektorsko polje $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} = (F_1, \dots, F_n)$ ima divergenco

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) = \operatorname{sled} A(t).$$

Sledi:

$$\det X(t) = J(\phi_t) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{sled} A(s) ds}.$$

Za omejeno domeno $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ z volumnom torej velja

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \int_{\phi_t(\Omega)} \operatorname{sled} A(t) dV = \int_{\Omega} \operatorname{sled} A(t) \cdot \det X(t) dV.$$

Tok ϕ_t ohranja volumen natanko tedaj, ko je $\operatorname{sled} A(t) = 0$ za vsak $t \in I$.

Druge kanonične rešitve linearnega sistema

Pogosto se pri diskusiji linearnega homogenega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad t \in I$$

vsaka neizrojena matrična funkcija $X(t)$ dimenzije $n \times n$, ki zadošča matrični enačbi

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

imenuje fundamentalna rešitev.

Za vsak fiksni $t_0 \in \mathbb{R}$ in $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ je potem funkcija

$$\mathbf{x}(t) = X(t)X(t_0)^{-1}\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

rešitev začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0.$$

Poljubni dve fundamentalni rešitvi $X(t)$ in $Y(t)$ se torej razlikujeta le za produkt z neko neizrojeno konstantno matriko C :

$$Y(t) = X(t)C.$$

Trikotni sistemi

Sistem $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ z matriko $A = (a_{i,j}(t))$ se imenuje **spodaj trikoten**, če je $a_{i,j}(t) \equiv 0$ za vsak $i < j$. Tak sistem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{1,1}(t)x_1 \\ \dot{x}_2 &= a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{x}_n &= a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \dots + a_{n,n}(t)x_n\end{aligned}$$

lahko rešimo tako, da najprej rešimo prvo (homogeno linearno) enačbo za $x_1(t)$ in rešitev vstavimo v drugo enačbo:

$$\dot{x}_2 = a_{2,1}(t)x_1(t) + a_{2,2}(t)x_2.$$

To je nehomogena linearna diferencialna enačba za $x_2(t)$, ki jo znamo rešiti. Rešitvi $x_1(t)$ in $x_2(t)$ vstavimo v tretjo enačbo in dobimo nehomogeno linearno diferencialno enačbo za $x_3(t)$. Postopek nadaljujemo do konca.

Podobno rešimo **zgoraj trikoten sistem**, pri katerem je $a_{i,j}(t) \equiv 0$ za vsak $i > j$.

Nehomogeni sistemi

Pred tem pa si oglejmo, kako rešimo nehomogen sistem, če poznamo fundamentalno rešitev pripadajočega homogenega sistema. Tu lahko uporabimo metodo **variacije konstante**, ki jo že poznamo iz primera $n = 1$.

Izrek

Naj bo $\Phi(t)^{n \times n}$ fundamentalna rešitev homogene enačbe

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = \text{Id}.$$

Potem je za vsak $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ funkcija

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds \right) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t) \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds$$

rešitev nehomogenega začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Dokaz

Naj bo

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds \right).$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\Phi}(t) \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds \right) + \Phi(t) \Phi(t)^{-1} \mathbf{f}(t) \\ &= A(t) \Phi(t) \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds \right) + \mathbf{f}(t) \\ &= A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0) \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0.$$