

Determinante, 2. del

Linearnost determinante

Pokažimo najprej na primeru, da determinanta v splošnem ni linearna.

Primer

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Potem je $\det(A + B) = \det I = 1$ in $\det A + \det B = 0 + 0 = 0$. Torej je

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B$$

Naj bo sedaj $C = I$ in $\alpha = 2$. Potem je $\det(\alpha C) = 4$ in $\alpha \det C = 2$, torej

$$\det(\alpha C) \neq \alpha \det C$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da je determinanta linearna v vsaki vrstici in stolpcu.

Trditev 1

Velja naslednja formula, ki ji pravimo linearnost determinante v i -ti vrstici:

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \beta b_{i,1} + \gamma c_{i,1} & \dots & \beta b_{i,n} + \gamma c_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} =$$

$$= \beta \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ b_{i,1} & \dots & b_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} + \gamma \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ c_{i,1} & \dots & c_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dokaz formule (1): Razvijmo determinanto matrike

$$A(\beta, \gamma) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \beta b_{i,1} + \gamma c_{i,1} & \dots & \beta b_{i,n} + \gamma c_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

po i -ti vrstici. Dobimo

$$\begin{aligned} \det A(\beta, \gamma) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} (\beta b_{i,k} + \gamma c_{i,k}) \det A_{i,k} \\ &= \beta \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} b_{i,k} \det A_{i,k} + \gamma \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} c_{i,k} \det A_{i,k} \end{aligned}$$

Odtod sledi zelena formula

$$\det A(\beta, \gamma) = \beta \det A(1, 0) + \gamma \det A(0, 1)$$

Zamenjava dveh vrstic v determinanti

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednjo trditev:

Trditev 2

Če v matriki zamenjamo dve vrstici, se njeni determinanti spremeni predznak. Se pravi $\det P_{i,j}A = -\det A$.

Dokaz: Trditev velja za 2×2 matrike, ker je

$$\det \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{bmatrix} = a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2} = -\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Predpostavimo, da trditev velja za $(n-1) \times (n-1)$ matrike, kjer je $n \geq 3$.

Vzemimo poljubno $n \times n$ matriko A in poljubna i in j , ki sta različna.

Potem za poljuben k , ki je različen od i in j , lahko $\det P_{i,j}A$ izračunamo tako, da jo razvijemo po k -ti vrstici, upoštevamo indukcijsko predpostavko, izpostavimo -1 in upoštevamo formulo za razvoj $\det A$ po k -ti vrstici.

Dobimo ravno $-\det A$.

Iz trditve sledi naslednja:

Posledica

Če ima matrika dve vrstici enaki, potem je njena determinanta enaka nič.

Dokaz: Če sta i -ta in j -ta vrstica matrike A enaki, potem je $P_{i,j}A = A$. Odtod sledi $\det P_{i,j}A = \det A$. Toda zgoraj smo dokazali, da je $\det P_{i,j}A = -\det A$. Od tod sledi $\det A = -\det A$, torej je res $\det A = 0$.

Trditev 3

Če v matriki A k eni vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice, potem se njena determinanta ne spremeni. Se pravi $\det(E_{i,j}(\alpha)A) = \det A$.

Dokaz: Po Trditvi 1 in po Posledici je

$$\det(E_{i,j}(\alpha)A) = \det \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ a_{i,1} + \alpha a_{j,1} & a_{i,n} + \alpha a_{j,n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \det A + \alpha \cdot 0 = \det A$$

Gaussova metoda za računanje determinant

Gaussova metoda nam pove, kako dano matriko s pomočjo elementarnih vrstičnih transformacij prevedemo na reducirano vrstično stopničasto formo. Da bi to metodo uporabili za računanje determinant, potrebujemo odgovora na naslednji vprašanji:

- Kako elementarne vrstične transformacije vplivajo na determinanto?
- Kako izračunamo determinanto reducirane stopničaste vrstične forme?

Na prvo vprašanje smo že odgovorili v prejšnjih razdelkih.

Trditev

- Če v matriki A k eni vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice, potem se njena determinanta ne spremeni.
- Če v matriki A zamenjamo dve vrstici, potem se njeni determinanti spremeni predznak.
- Če v matriki A eno vrstico pomnožimo z β , potem se tudi njena determinanta pomnoži z β .

Ker je reducirana vrstična stopničasta forma vedno zgornje trikotna, dobimo odgovor na drugo vprašanje iz naslednje trditve:

Trditve

Determinanta zgornje trikotne matrike je enaka produktu elementov na njeni glavni diagonali.

Dokaz: Če večkrat uporabimo formulo za razvoj po prvem stolpcu, dobimo

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} &= a_{1,1} \det \begin{bmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \\ &= a_{1,1} a_{2,2} \det \begin{bmatrix} a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \dots = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}. \end{aligned}$$

Primer

S pomočjo Gaussove metode izračunaj determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

S transformacijama $E_{2,1}(-2)$ in $E_{3,1}(1)$ dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

S transformacijama $E_{3,2}(\frac{3}{4})$ in $E_{4,2}(\frac{1}{2})$ dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

S transformacijo $E_{4,3}(-\frac{6}{5})$ dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$$

Formula za determinanto zgornje trikotne matrike nam da

$$\det A = 1 \cdot (-4) \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{5} = -9.$$

Determinanta produkta matrik

Dokažimo, da je determinanta produkta enaka produktu determinant.

Izrek o determinanti produkta matrik

Za poljubni kvadratni matriki A in B velja $\det AB = \det A \det B$.

Dokaz: Če v formule

$$\begin{aligned}\det(E_{i,j}(\alpha)B) &= \det B, \\ \det(P_{i,j}B) &= -\det B, \\ \det(E_i(\beta)B) &= \beta \det B\end{aligned}\tag{2}$$

vstavimo namesto B identično matriko, dobimo

$$\begin{aligned}\det(E_{i,j}(\alpha)) &= 1, \\ \det(P_{i,j}) &= -1, \\ \det(E_i(\beta)) &= \beta.\end{aligned}\tag{3}$$

Iz formul (2) in (3) sledi

$$\begin{aligned}\det(E_{i,j}(\alpha)B) &= \det E_{i,j}(\alpha) \det B, \\ \det(P_{i,j}B) &= \det P_{i,j} \det B, \\ \det(E_i(\beta)B) &= \det E_i(\beta) \det B.\end{aligned}\tag{4}$$

Torej formula $\det AB = \det A \det B$ velja, ko je A elementarna matrika.

Formula $\det AB = \det A \det B$ velja tudi v primeru, ko ima matrika A v eni vrstici same ničle, saj ima potem tudi matrika AB v isti vrstici same ničle, torej je $\det A = \det AB = 0$, kar vidimo iz razvoja po tej vrstici.

Lotimo se sedaj splošnega primera. Po Gaussu obstajajo take elementarne matrike $E_1, \dots, E_n$, da ima matrika $S = E_n \cdots E_1 A$ reducirano vrstično stopničasto obliko. Ločimo dva primera.

Če ima matrika S ničelno vrstico, potem velja

$$\det E_n \cdots \det E_1 \det AB = \det(E_n \cdots E_1 A)B = \det SB = 0,$$

$$\det E_n \cdots \det E_1 \det A = \det E_n \cdots E_1 A = \det S = 0.$$

Po krajšanju dobimo $\det A = \det AB = 0$. Sledi $\det AB = \det A \det B$.

Če pa matrika S nima ničelne vrstice, potem je $S = I$. Odtod sledi, da je

$$\det E_n \cdots \det E_1 \det AB = \det(E_n \cdots E_1 A)B = \det IB = \det B,$$

$$\det E_n \cdots \det E_1 \det A = \det E_n \cdots E_1 A = \det I.$$

Drugo formulo pomnožimo z $\det B$ in primerjamo leve strani obeh formul.

Po krajšanju spet dobimo $\det AB = \det A \det B$.

Determinanta obrnljive matrike

Kako z determinanto preverimo, ali je matrika obrnljiva?

Izrek o determinanti obrnljive matrike

Kvadratna matrika A je obrnljiva natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

Dokaz: Če je matrika A obrnljiva, potem obstaja taka matrika B , da velja $AB = I$. Če na obeh straneh uporabimo determinanto, dobimo

$$\det A \det B = \det AB = \det I = 1.$$

Odtod sledi, da je $\det A \neq 0$.

Recimo sedaj, da je $\det A \neq 0$. Izberimo take elementarne matrike $E_1, \dots, E_n$, da je $S := E_n \cdots E_1 A$ reducirana vrstična stopničasta forma. Ker so elementarne matrike obrnljive, imajo neničelne determinante. Po predpostavki $\det A \neq 0$ odtod sledi, da je $\det S \neq 0$. Torej S ne more imeti ničelne vrstice. Odtod sledi, da je $S = I$. Torej je $A = E_1^{-1} \cdots E_n^{-1}$ obrnljiva matrika.

Determinanta transponirane matrike

Če matriko transponiramo, se njena determinanta ne spremeni.

Izrek o determinanti transponirane matrike

Za vsako kvadratno matriko A velja $\det A^T = \det A$.

Dokaz. Najprej opazimo, da izrek velja za elementarne matrike:

- Iz $P_{i,j}^T = P_{i,j}$ sledi $\det P_{i,j}^T = \det P_{i,j}$.
- Iz $E_i(\beta)^T = E_i(\beta)$ sledi $\det E_i(\beta)^T = \det E_i(\beta)$.
- Iz $E_{i,j}(\alpha)^T = E_{j,i}(\alpha)$ sledi $\det E_{i,j}(\alpha)^T = 1 = \det E_{i,j}(\alpha)$.

Izberimo take elementarne matrike $E_1, \dots, E_n$, da je $S := E_n \cdots E_1 A$ reducirana vrstična stopničasta forma. Ločimo dva primera:

- Če ima S ničelno vrstico, potem ima S^T ničeln stolpec, torej je $\det S^T = 0 = \det S$.
- Če je $S = I$, potem $\det S^T = 1 = \det S$, ker je $I^T = I$.

Torej je v obeh primerih $\det S^T = \det S$.

Ker je determinanta produkta produkt determinant, velja

$$\begin{aligned}\det S &= \det(E_n \cdots E_1 A) \\ &= \det E_n \cdots \det E_1 \det A\end{aligned}\tag{5}$$

in

$$\begin{aligned}\det S^T &= \det(E_n \cdots E_1 A)^T \\ &= \det(A^T E_1^T \cdots E_n^T) = \\ &= \det A^T \det E_1^T \cdots \det E_n^T\end{aligned}\tag{6}$$

Iz (5) in (6) sledi

$$\det A^T = \det A\tag{7}$$

ker je $\det S^T = \det S$ in $\det E_i^T = \det E_i \neq 0$ za vsak $i = 1, \dots, n$.

Determinanta bločno trikotne matrike

Kvadratna matrika je **bločno zgornje trikotna**, če je oblike

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} & b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m} & b_{m,1} & \dots & b_{m,n} \\ 0 & \dots & 0 & c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Izrek o determinanti bločno zgornje trikotne matrike

Za vsako bločno zgornje trikotno matriko velja

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \det C$$

Dokaz: Najprej opazimo, da velja

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Odtod sledi

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Dokažimo sedaj, da je

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

S pomočjo elementarnih transformacij tipa $E_{i,j}(\alpha)$ lahko namreč eno matriko prevedemo na drugo. Natančneje

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

kjer je

$$E = E_{1,m+1}(b_{1,1}) \cdots E_{m,m+1}(b_{m,1}) E_{1,m+n}(b_{1,n}) \cdots E_{m,m+n}(b_{m,n})$$

Z večkratno uporabo razvoja po prvi vrsti dobimo.

$$\det \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I_{m-1} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} = \dots = \det \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det C$$

Z večkratno uporabo razvoja po zadnji vrsti dobimo

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \dots = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} = \det A$$

Torej je

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \det C \det A$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 24 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \\ 0 & 0 & 21 & 22 \\ 0 & 0 & 23 & 24 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 17 & 18 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{bmatrix} = (-6)(-4)(-2) = -48$$

Opomba: Podobna formula velja tudi za spodnjetrikotne matrike

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}^T = \det \begin{bmatrix} A^T & B^T \\ 0 & C^T \end{bmatrix} =$$

$$= \det A^T \det C^T = \det A \det C$$

Schurov komplement

Zanima nas ali se da formulo

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

posplošiti na primer, ko so a, b, c, d matrice. Odgovor ni preprost.

Trditev

Naj bodo A, B, C in D matrice velikosti $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$ in $n \times n$.

- Če je matrika D obrnljiva, potem velja

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det D \det(A - BD^{-1}C)$$

- Če je matrika A obrnljiva, potem velja

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$$

Dokaz: Če je matrika D obrnljiva, potem velja

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ D^{-1}C & I_n \end{bmatrix}$$

Odtod sledi, da je

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ D^{-1}C & I_n \end{bmatrix} \\ &= \det(A - BD^{-1}C) \det D \det I_m \det I_n \end{aligned}$$

Če je matrika A obrnljiva, potem velja

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

Odtod sledi, da je

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= \det I_m \det I_n \det A \det(D - CA^{-1}B) \end{aligned}$$