

LINEARNA ALGEBRA 2020/21
7. VAJE: 16. 11. 2019

1. Podana je matrika $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ in matrika e_{ij} , ki ima 1 na mestu (i, j) in 0 drugje. Izračunaj $e_{ij}Ae_{kl}$ in $e_{ij}e_{kl}$. Izračunaj še $(I + \alpha e_{ij})(I + \beta e_{kl})$.
2. Pokaži $(AB)^T = B^T A^T$ za vse matrike, ki jih lahko zmnožimo.
3. Kvadratna matrika A je simetrična, če je $A^T = A$ in anti(poševno)-simetrična, če je $A^T = -A$. Pokaži, da lahko vsako matriko na enoličen način zapišemo kot vsoto simetrične in anti-simetrične matrike.
4. Pokaži, da za nobeno kvadratno matriko ne velja $A - A^T = I$. Pokaži, da za noben par kvadratnih matrik ne velja $AB - BA = I$.
5. S $\text{tr}(A)$ za kvadratno matriko A označimo vsoto diagonalnih elementov. Pokaži $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ in $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

6. Reši enačbo

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Poišči inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

in reši enačbo $Ax = b$ za $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

8. Kdaj je obrnljiva diagonalna matrika $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$.
9. Kdaj je matrika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ obrnljiva. Eksplicitno zapiši njen inverz.

1. Podana je matrika $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ in matrika e_{ij} , ki ima 1 na mestu (i, j) in 0 drugje. ^{matrična enota}
Izračunaj $e_{ij} A e_{kl}$ in $e_{ij} e_{kl}$. Izračunaj še $(I + \alpha e_{ij})(I + \beta e_{kl})$.

e_{ij} $n \times n$ matrika 1 i -ti vrstici j -ti stolpci 0 - drugod

$$e_{ij} = i \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} e_{ij}$$

$e_{ij} A \quad A e_{kl}$

$i \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix} \rightarrow j\text{-ta vrstica matrike } A \text{ v } i\text{-ti vrstici}$

$i \neq i$ potem dobimo v i -ti vrstici same ničle.

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ j -ti stolpec matrike A v i -ti vrstici

$\begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{jk}$ k -to mesto

$(e_{ij} A) e_{kl} = i \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix} e_{kl} = i \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = a_{jk} e_{il}$

$e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il} \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$

$I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$

Izračunaj še $(I + \alpha e_{ij})(I + \beta e_{kl})$.

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ E_j(\alpha) & E_k(\beta) \end{matrix}$$

$E_{ij}(\alpha) A \rightarrow$ i -ti vrstici matrike A prištejemo α -kratnik j -te vrstice

$A E_{ij}(\beta) \rightarrow$ j -temu stolpcu matrike A prištejemo β -kratnik i -tega stolpca.

$$(I + \alpha e_{ij})(I + \beta e_{kl}) =$$

$$II + I\beta e_{kl} + \alpha e_{ij}I + \alpha\beta e_{ij}e_{kl}$$

$$I + \beta e_{kl} + \alpha e_{ij} + \alpha\beta e_{ij}e_{kl}$$

2. Pokaži $(AB)^T = B^T A^T$ za vse matrike, ki jih lahko zmnožimo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots m}}$$

$$A^T = [a_{ji}]_{\substack{j=1 \dots m \\ i=1 \dots n}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{TT} = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$\textcircled{*} (AB)^T = B^T A^T$$

$\textcircled{*}$ in $\textcircled{**}$ transponiranje je involucija

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^m (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^m b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki}$$

$$(AB)^T_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki}$$

3. Kvadratna matrika A je simetrična, če je $A^T = A$ in anti(poševno)-simetrična, če je $A^T = -A$. Pokaži, da lahko vsako matriko na enoličen način zapišemo kot vsoto simetrične in anti-simetrične matrike.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \text{simetrični}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \text{anti-simetrični}$$

Za poljubno kvadratno matriko B

iščemo S in R , da

$$B = S + R,$$

$$S^T = S \text{ in } R^T = -R$$

$$S = \frac{1}{2}(B + B^T) \quad S^T = \frac{1}{2}(B^T + B^{TT}) = \frac{1}{2}(B^T + B) = S$$

$$R = \frac{1}{2}(B - B^T) \quad R^T = \frac{1}{2}(B^T - B^{TT}) = \frac{1}{2}(B^T - B) = -R$$

$$S + R = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^T - \frac{1}{2}B^T = B$$

S tem smo pokazali obstoj zapisa

Recimo, da B lahko zapišemo na enak način

$$B = S + R$$

$$B^T = S^T + R^T = S - R$$

$$S = \frac{1}{2}(B + B^T)$$

$$R = \frac{1}{2}(B - B^T)$$

če bi
reševali
s koeficienti.

$$b_{ij} = s_{ij} + r_{ij} \quad n^2 \text{- enačb}$$

$$s_{ij} = s_{ji} \quad \frac{n^2}{2} \text{- enačb}$$

$$r_{ij} = -r_{ji} \quad \frac{n^2}{2} \text{- enačb}$$

če je A simetrična in anti-simetrična.

$$A^{\text{sim}} = A^{\text{asim}} = -A$$

$$A = -A \rightarrow 2A = 0 \rightarrow A = 0.$$

enoličnost

$$S + R = S' + R'$$

sim anti sim

$$S - S' = R' - R$$

$$L: (S - S')^T = S^T - S'^T = S - S'$$

$$D: (R' - R)^T = R'^T - R^T = -R' + R$$

$S - S'$ in $R' - R$ sta hkrati simetrični in anti-simetrični.

$$S - S' = 0 \rightarrow S = S' \quad \checkmark$$

$$R' - R = 0 \rightarrow R' = R \quad \checkmark$$

sled matrice (trace)

5. S $\text{tr}(A)$ za kvadratno matriko A označimo vsoto diagonalnih elementov. Pokaži
 $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ in $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

$$\text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T) \quad \text{pri transponiranju se diagonalni obrne.}$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij})$$

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

$$(BA)_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}$$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}$$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = \text{tr}(BA)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

če je AB kvadratna
(tudi če A, B nista kvadratni)

potem je $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

4. Pokaži, da za nobeno kvadratno matriko ne velja $A - A^T = I$. Pokaži, da za noben par kvadratnih matrik ne velja $AB - BA = I$.

(1) $A - A^T \neq I$ $A - A^T$ ima ničelno diagonalo

(2) $(A - A^T)^T = A^T - A$ $A - A^T$ - antisim
 I - simetričen $\neq 0$

(3) $\text{tr}(A - A^T) = \text{tr}(A) - \text{tr}(A^T) = 0$
 $\text{tr}(I) = n$

$AB - BA \neq I$ $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$
 $\text{tr}(I) = n$ $0 \neq n$

6. Reši enačbo

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ $n \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$AX = B$ A - kvadratna matrika

X, B istih dimenzij

$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}_n^m = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}_n^m$

$\left(\begin{matrix} \text{Splošno} & A \\ n & \dots & m \end{matrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$

• Če je A obrnljiva $X = A^{-1}B$ (Ne $X = BA^{-1}$)

- V vsakem primeru lahko rešujemo (poizkusimo reševati) z Gaussom

$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 9 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & 5 \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{5}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{+3R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -14 & 4 - \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{5}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{R_1/2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{5}{2} \end{array} \right]$

$$\begin{aligned} x_1 &= -7 & y_1 &= -\frac{7}{4} \\ x_2 &= -5 & y_2 &= -\frac{5}{2} \end{aligned} \quad X = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{7}{4} \\ -5 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Če iščemo inverz
rešujemo sistem $AX=I$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$AX=I$$

$$X=A^{-1}$$

7. Poišči inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

in reši enačbo $Ax=b$ za $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Inverz matrice A je $\tilde{A}^{-1}$. $\nearrow$ Ne obstaja nujno. $A\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}A = I$

Če je A kvadratna

$$\underline{A\tilde{A}^{-1} = I \Rightarrow \tilde{A}^{-1}A = I}$$

$$AX=I \quad X=A^{-1} \text{ (če obstaja)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Če nimamo predhodno izračunanega
inverza je hitreje reševati sisl

$$Ax=b \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x=A^{-1}b$$

$$[NE \ x \neq bA^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$