Zaporedja – nadaljevanje

Spomnimo se: Število (točka na $\mathbb{R}$) S je stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, če velja:

Za $\forall \varepsilon > 0$ in za $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ obstaja $n_1 > n_0$, tako da velja

$$|a_{n_1} - S| < \varepsilon .$$

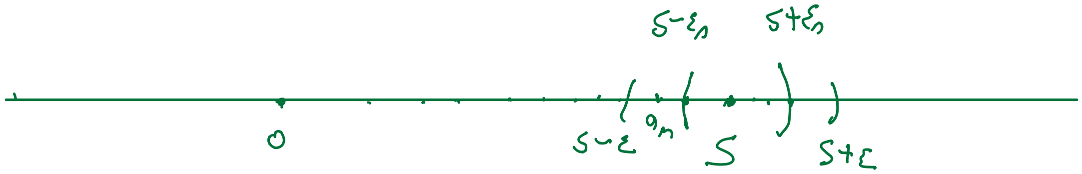
Lahko rečemo tudi

$$a_{n_1} \in (S-\varepsilon, S+\varepsilon)$$

Od tod takoj sledi:

V vsakem intervalu $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zap. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

– če je S stekališče.



Primeri:

1.) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Trdimo, $s=0$ je stekališče tega zaporedja.

Preverimo to trditev po definiciji.

Naj bo $\varepsilon>0$ poljubno majhno število. Trdimo: za $\forall\, n_0\in\mathbb{N}$ obstaja $n_1>n_0$, tako da velja:

$$|0-a_{n_1}| = |0-\frac{1}{n_1}| < \varepsilon$$

Od tod sledi: iščemo n_1, tako da bo

$$|0-\frac{1}{n_1}| = |-\frac{1}{n_1}| = \frac{1}{n_1} < \varepsilon$$

Rešujemo to neenačbo

$$\frac{1}{n_1} < \varepsilon$$

$$n_1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Za iskani n_1 lahko vzamemo

$$n_1 = \max\left\{ \frac{1}{\varepsilon}, n_0 \right\} + 1$$

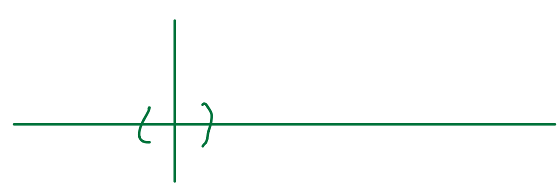
Primer: $\varepsilon = \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$, $n_0 = 200$

Iskani $n_1 = \max\{10^{10}, 200\} = 10^{10} + 1$

V tem primeru velja celo: za $\forall\, n_2 > n_1$ velja:

$$n_2 \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) =$$

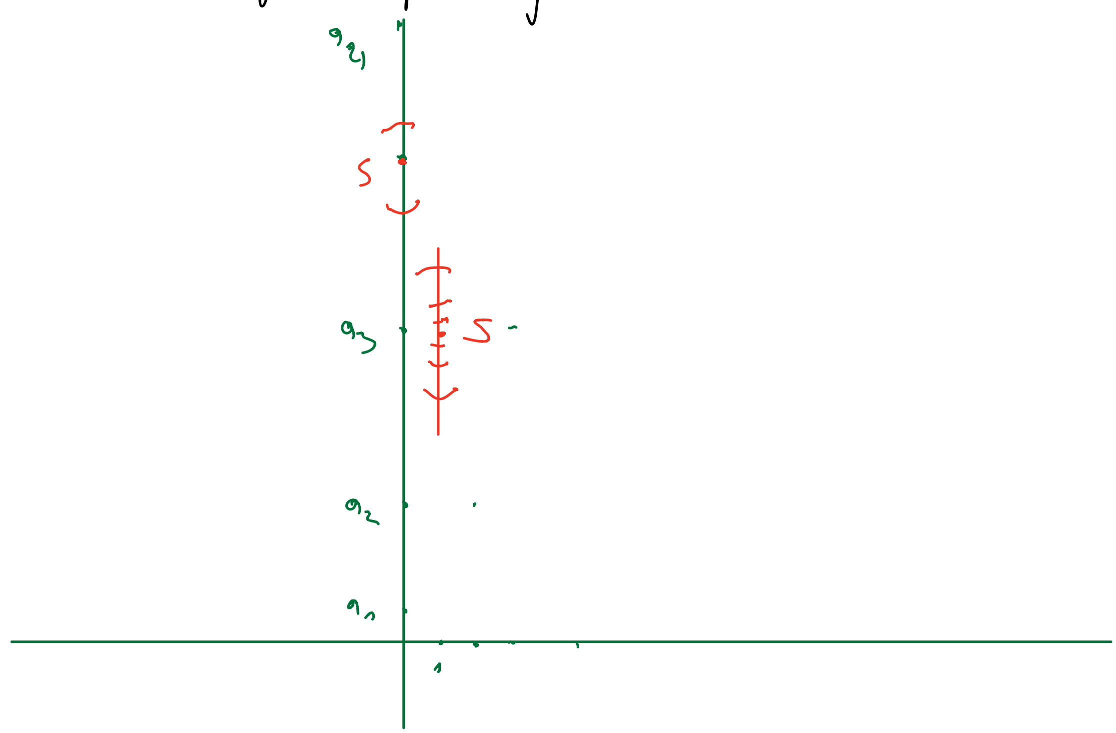
$$= (-\varepsilon, \varepsilon) = \left(-\left(\frac{1}{10}\right)^{10}, \left(\frac{1}{10}\right)^{10}\right)$$



2.) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$

To zaporedje nima nobenega stekališča.

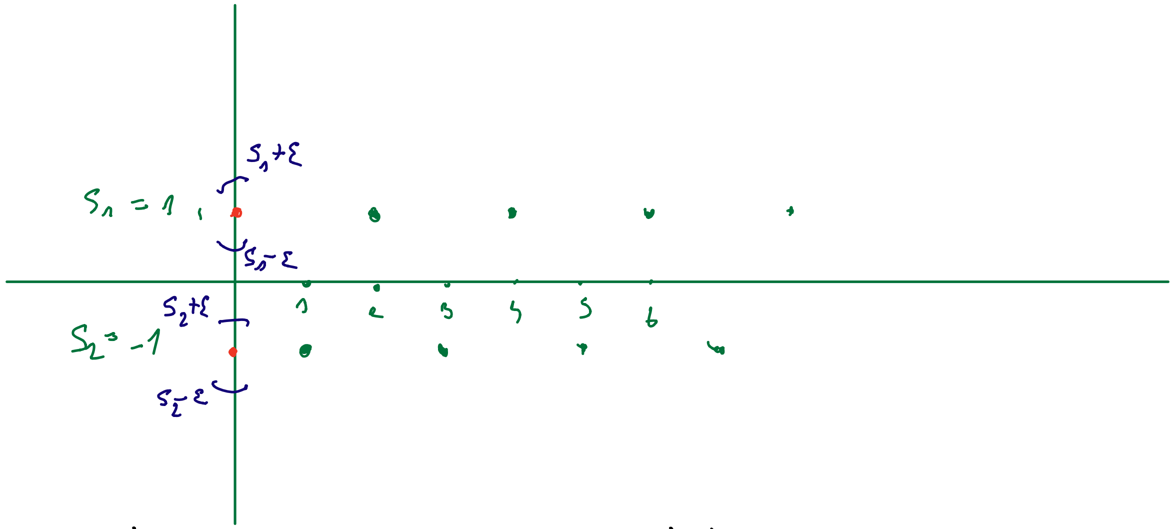
Naj bo $S \in \mathbb{R}$ poljubna točka. Interval $(S-1, S+1)$ $(\varepsilon = 1)$ vsebuje kvečjemu en člen našega zaporedja



3.) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, -1, +1, -1, +1, \ldots\}$

To zaporedje ima dve stekališči $s_1=+1$, $s_2=-1$.



Ugotovitev: Naj bo S stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. V vsaki (še tako majhni) okolici S leži neskončno mnogo členov zaporedja, zunaj te okolice pa jih je lahko končno ali pa neskončno.

Izrek: Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje. Tedaj ima to zaporedje vsaj eno stekališče.

Skica dokaza: Naslonili se bomo na naslednjo pomembno lastnost zaprtih intervalov, ki je ne bomo dokazali:

Lastnost pokri: Denimo, da zaprt interval $[a,b]$ pokrijemo z intervali oblike $(z-\varepsilon_z, z+\varepsilon_z)$.

To pomeni:

$$[a,b] \subset (z_1-\varepsilon_1, z_1+\varepsilon_1) \cup (z_2-\varepsilon_2, z_2+\varepsilon_2) \cup (z_3-\varepsilon_3, z_3+\varepsilon_3) \cup \dots$$

Potem obstaja končno mnogo intervalov

$$\underbrace{(z_{k_1}-\varepsilon_{z_{k_1}}, z_{k_1}+\varepsilon_{z_{k_1}}), (z_{k_2}-\varepsilon_{z_{k_2}}, z_{k_2}+\varepsilon_{z_{k_2}}), \dots (z_{k_N}-\varepsilon_{z_{k_N}}, z_{k_N}+\varepsilon_{z_{k_N}})}_{\text{intervalov je } N},$$

tako da velja:

$$[a,b] \subset (z_{k_1}-\varepsilon, z_{k_1}+\varepsilon) \cup \dots \cup (z_{k_N}-\varepsilon, z_{k_N}+\varepsilon)$$

Zdaj si pa oglejmo dokaz izreka.

Če je zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno, potem ima infimum in supremum.

$$M = \sup \{a_n\}$$
$$m = \inf \{a_n\}$$

To velja zaradi osnovne – definicijske lastnosti množice realnih števil.

Izberimo $\varepsilon_1 > 0$. Pokrijmo $[m, M]$ z odprtimi intervali $(z_{11}-\varepsilon_1, z_{11}+\varepsilon_1)$, $(z_{12}-\varepsilon_1, z_{12}+\varepsilon_1)$ ... $(z_{1k}-\varepsilon_1, z_{1k}+\varepsilon_1)$ ...

Po lastnosti končnega podpokritja obstaja končno mnogo središč z, tako da velja

$$[m, M] \subset (z_{1l_1}-\varepsilon_1, z_{1l_1}+\varepsilon_1) \cup \ldots \cup (z_{1l_r}-\varepsilon_1, z_{1l_r}+\varepsilon_1).$$

V vsaj enem od intervalov na desni mora ležati neskončno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Denimo, da je tak interval

$$(z_{1,n_1}-\varepsilon_1,\ z_{1,n_1}+\varepsilon_1)$$

Vzemimo interval $[z_{1,n_1}-\varepsilon_1,\ z_{1,n_1}+\varepsilon_1]$

Sedaj pokrijmo ta interval z nekim pokritjem

$$(z_{2,1}-\varepsilon_2,\ z_{2,1}+\varepsilon_2), \dots, (z_{2,m}-\varepsilon_2,\ z_{2,m}+\varepsilon_2) \dots$$

$$\varepsilon_2 < \varepsilon_1 .$$

Zaradi lastnosti končnega podpokritja intervala

$$[z_{1,n_1}-\varepsilon_1,\ z_{1,n_1}+\varepsilon_1]$$

imamo:

$$[z_{1,n_1}-\varepsilon_1,\ z_{1,n_1}+\varepsilon_1] \subseteq (z_{2,k_1}-\varepsilon_2,\ z_{2,k_1}+\varepsilon_2) \cup \dots \cup (z_{2,k_n}-\varepsilon_2,\ z_{2,k_n}+\varepsilon_2)$$

Torej obstaja vsaj interval ($n_2 = k_j$ z_2 nek j)

$$\langle z_{2,n_2} - \varepsilon_2, \; z_{2,n_2} + \varepsilon_2 \rangle,$$

ki vsebuje ∞-mnogo členov naše zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Nadaljujemo na ta način.

Dobimo zaporedje gnezdenih intervalov;

$$[m, M] \supset [z_{1,n_1} - \varepsilon_1, \; z_{1,n_1} + \varepsilon_1] \supset [z_{2,n_2} - \varepsilon_2, \; z_{2,n_2} + \varepsilon_2] \supset$$

$$\supset [z_{3,n_3} - \varepsilon_3, \; z_{3,n_3} + \varepsilon_3] \supset \ldots\ldots$$

Za ε_i velja: $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$

Vzamemo take ε_i, da velja

ko $i \to \infty$, gre ε_i 0.

Lahko je videti:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [z_{i,r_i} - \varepsilon_i , z_{i,r_i} + \varepsilon_i] \text{ je}$$

natanko ena točka S

Videti se da tudi, da je ta točka S

stekališče našega zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

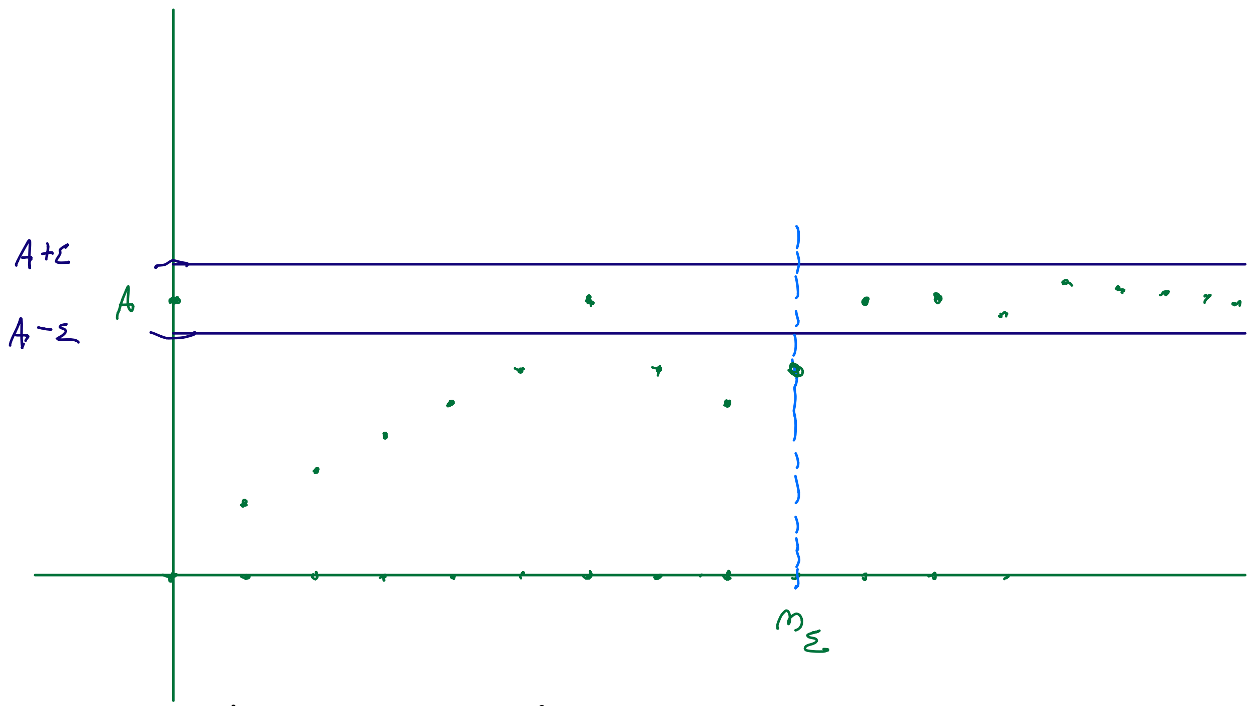
Limita zaporedja

Definicija Naj bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje.
Število $A \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,
če velja:
za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja naravno število
$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tako da velja:

$$n > n_\varepsilon \implies |A - a_n| < \varepsilon$$

Kaj to pomeni: Za vsak $\varepsilon > 0$ so od nekega člena a_{n_ε} naprej vsi členi a_n $(n > n_\varepsilon)$ [illegible] intervala

$$(A - \varepsilon, \; A + \varepsilon)$$



Takoj vidimo, da velja naslednji izrek:

<u>Izrek:</u> Naj bo A limita zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno število. Potem velja:

1.) V $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ je neskončno mnogo členov zaporedja

2.) Zunaj $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ je kvečjemu končno mnogo členov zaporedja.

Dokaz: Po def. limite za $\varepsilon > 0$ obstaja $n_\varepsilon \ni$:

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |A - a_n| < \varepsilon$$

Torej: $a_{n_\varepsilon+1}, a_{n_\varepsilon+2}, a_{n_\varepsilon+3}, \ldots\ldots$

Ti členi so v $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ in jih je neskončno.

Zunaj $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ so morda členi

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_\varepsilon}}_{\text{končno mnogo.}}$$

$\square$