

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Norme matrik

V dokazih bomo uporabljali katerokoli od t.i. **naravnih norm** $\|A\|$ kvadratnih matrik $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, za katere velja:

- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,
- $|A\mathbf{x}| \leq \|A\| \cdot |\mathbf{x}|$ za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dva naravna kandidata sta **Evklidska norma**

$$\|A\|_e^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2$$

in **operatorska norma**

$$\|A\|_{op} = \sup\{|A\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{x}| = 1\}.$$

Z uporabo Cauchy-Schwarzove neenakosti ni težko videti, da za vsak $i, j = 1, \dots, n$ velja

$$|a_{i,j}| \leq \|A\|_{op} \leq \|A\|_e \leq \sqrt{n} \|A\|_{op}.$$

Konvergenca matričnih vrst

Odtod sledi naslednja trditev za katerokoli od zgornjih dveh norm.

Trditev

Vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| < +\infty$ konvergira natanko tedaj, ko vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ konvergira absolutno po komponentah (to je, $\sum_{k=0}^{\infty} |(A_k)_{i,j}|$ konvergira za vsak $i, j = 1, \dots, n$). V tem primeru pravimo, da vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ konvergira absolutno.

Podobno lahko dobimo izreke o členskem odvajanju in integriranju matričnih funkcijskih vrst. Odvod matrične funkcije $A(t) = (a_{i,j}(t))$ je definiran po komponentah: $\dot{A}(t) = (\dot{a}_{i,j}(t))$. Potrebovali bomo naslednjo trditev.

Trditev

Denimo, da matrična potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ konvergira na $|t| < r$. Potem na tem intervalu (ali krogu, če je t kompleksna spremenljivka) velja

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k t^{k-1}.$$

Fundamentalna rešitev

Izrek

Naj bo A konstantna $n \times n$ matrika. Začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

ima rešitev

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) \mathbf{x}_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Matrična funkcija $\Phi(t) = e^{tA}$ je fundamentalna rešitev sistema za $t_0 = 0$.

Dokaz Matrična eksponentna vrsta za $\Phi(t) = e^{tA}$ konvergira absolutno za vsak $t \in \mathbb{R}$, kar vidimo iz

$$\|\Phi(t)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k = e^{|t| \cdot \|A\|} < \infty.$$

Očitno je $\Phi(0) = \text{Id}$. Člensko odvajanje vrste za $\Phi(t)$ nam da

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} A^k = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = A\Phi(t).$$

Razvoj matričnega binoma

Naloga: Pokaži s primerom, da **enačba**

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

v splošnem ne velja za kvadratni matriki A, B dimenzije $n > 1$.

Enačba pa velja v primeru, ko matriki komutirata, $AB = BA$. V posebnem torej velja

$$e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA} = e^{tA} e^{sA}.$$

Navodilo: uporabi Cauchyjev produkt vrst kot v primeru, ko sta A in B števili. Bistveno je, da za vsak par komutirajočih matrik A in B velja binomska formula

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Če A in B ne komutirata, ta formula v splošnem ne velja.

Naloga: Pokaži, da je $\Phi(t) = e^{(t-t_0)A}$ fundamentalna rešitev sistema

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = \text{Id}.$$

Rešitev nehomogene enačbe

Partikularno rešitev nehomogenega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

s konstantno matriko A dobimo s formulo

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{f}(s) ds.$$

Splošna formula za partikularno rešitev je namreč

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds,$$

kjer je $\Phi(t)$ fundamentalna rešitev

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I.$$

V primeru konstantne matrike A je $\Phi(t) = e^{tA}$ in

$$\Phi(t)\Phi(s)^{-1} = e^{(t-s)A}.$$

Sistemi z diagonalno matriko

Oglejmo si najpreprostejši primer, ko je matrika A diagonalna:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Števila λ_i so njene lastne vrednosti. Pripadajoči sistem

$$\dot{x}_k = \lambda_k x_k, \quad k = 1, \dots, n$$

sestoji iz n med seboj neodvisnih enačb. V tem primeru je

$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k), \quad \Phi(t) = e^{tA} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

Za vsak vektor $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je funkcija

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} = (c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t})$$

rešitev problema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}.$

Uporaba Jordanove normalne forme

Vsaka $n \times n$ matrika je konjugirana neki Jordanovi matriki J ,

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1},$$

kjer je P obrnljiva matrika (v splošnem kompleksna) in je

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix} = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \text{Jordanov blok}$$

Opomba: Lastna vrednosti λ_i in matrika P so lahko kompleksne!

Uporaba Jordanove normalne forme

Naj bo

$$A = PJP^{-1}.$$

Tedaj je

$$A^2 = (PJP^{-1})^2 = PJP^{-1} \cdot PJP^{-1} = PJ^2P^{-1}.$$

Z indukcijo dobimo

$$A^k = PJ^kP^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Odtod dobimo fundamentalno rešitev

$$\Phi(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} PJ^kP^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J^k \right) P^{-1} = P e^{tJ} P^{-1}.$$

Z uvedbo nove spremenljivke

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$$

spremenimo sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = PJP^{-1}\mathbf{x}$ v

$$P\dot{\mathbf{y}} = PJ\mathbf{y} \iff \dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y}.$$

Torej zadošča obravnavati sisteme z Jordanovo matriko.

Redukcija na Jordanove kletke

Nadalje imamo

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$$

kjer so J_i Jordanove kletke. Potem je

$$e^{tJ} = \text{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_m}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Naj bo sedaj J Jordanova kletka dimenzije n z lastno vrednostjo λ :

$$J = \lambda I + N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potenca N^k matrike N ima enice na k -ti naddiagonali in ničle drugje; za $k \geq n$ je $N^k = 0$. Pravimo, da je matrika N **nilpotentna**.

Sistem z Jordanovo kletko

Odtod dobimo

$$\begin{aligned} e^{tN} &= I + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} N^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ker je

$$J = \lambda I + N$$

in matriki λI in N komutirata, sledi

$$\Phi(t) = e^{tJ} = e^{t(\lambda I + N)} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN}.$$

S tem smo našli eksplisitno fundamentalno rešitev (v splošnem kompleksno) za poljuben sistem $\dot{x} = Ax$ s konstantno matriko A .

Uporaba lastnih in korenskih vektorjev

V praksi je pogosto ugodneje, če direktno uporabimo lastne in korenske vektorje matrike A . Naj bo $\mathbf{v}$ lastni vektor z lastno vrednostjo λ . Tedaj je funkcija

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = A \mathbf{x}(t)$$

rešitev sistema z začetno vrednostjo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$.

Če je $\lambda = a + ib$ kompleksno število in $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ pripadajoči kompleksni lastni vektor, je

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{(a+ib)t} (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)) (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2).$$

Ker je A realna, je tudi $\bar{\lambda} = a - ib$ lastna vrednost A z lastnim vektorjem $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$ in pripadajoča lastna funkcija je

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}} = e^{(a-ib)t} (\mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2).$$

Ti dve kompleksni rešitvi lahko nadomestimo s parom realnih rešitev

$$\begin{aligned} \Re \mathbf{x}(t) &= e^{at} (\cos(bt) \mathbf{v}_1 - \sin(bt) \mathbf{v}_2), \\ \Im \mathbf{x}(t) &= e^{at} (\sin(bt) \mathbf{v}_1 + \cos(bt) \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Rešitve v lastnih smereh matrike

Če ima $\mathbb{R}^n$ bazo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lastnih vektorjev matrike A z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, je splošna rešitev enaka

$$\mathbf{x}(t, c_1, \dots, c_n) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j$$

za poljubne konstante $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. To ustreza primeru, ko je matrika A diagonalizabilna.

Skoraj vsaka matrika je diagonalizabilna. V posebnem je taka vsaka simetrična matrika in vse njene lastne vrednosti so realne.

Morebitne kompleksne rešitve (v primeru kompleksnih lastnih vrednosti) lahko nadomestimo z realnimi rešitvami, tako da vzamemo njihove realne in imaginarne komponente.

Rešitve na korenskem podprostoru

Oglejmo si še primer, ko je λ lastna vrednost z lastnim vektorjem $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ in pripadajočimi korenskimi vektorji $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$:

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1, \quad \dots, \quad A\mathbf{v}_k = \lambda\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}.$$

V tej bazi podprostora $E = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ je A predstavljena z Jordanovo kletko. Pripadajoče rešitve so

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{\lambda t} (\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1) \\ \mathbf{x}_3(t) &= e^{\lambda t} \left(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2 + \frac{t^2}{2} \mathbf{v}_1 \right) \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{x}_k(t) &= e^{\lambda t} \left(\mathbf{v}_k + t\mathbf{v}_{k-1} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \mathbf{v}_1 \right) \end{aligned}$$

V primeru kompleksne lastne vrednosti λ dobimo tudi ustrezne konjugirano-kompleksne rešitve in jih nadomestimo z njihovimi realnimi in imaginarnimi komponentami.

Preverba

Preverimo:

$$\mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda t} \left(\mathbf{v}_j + t\mathbf{v}_{j-1} + \frac{t^2}{2}\mathbf{v}_{j-2} + \cdots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\mathbf{v}_1 \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_j(t) = e^{\lambda t} & \left(\lambda \left(\mathbf{v}_j + t\mathbf{v}_{j-1} + \frac{t^2}{2}\mathbf{v}_{j-2} + \cdots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\mathbf{v}_1 \right) \right. \\ & \left. + \mathbf{v}_{j-1} + t\mathbf{v}_{j-2} + \cdots + \frac{t^{j-2}}{(j-2)!}\mathbf{v}_1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda t} & \left((\lambda\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j-1}) + t(\lambda\mathbf{v}_{j-1} + \mathbf{v}_{j-2}) + \frac{t^2}{2}(\lambda\mathbf{v}_{j-2} + \mathbf{v}_{j-3}) + \right. \\ & \left. \cdots + \frac{t^{j-2}}{(j-2)!}(\lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\lambda\mathbf{v}_1 \right) \end{aligned}$$

Če člene v vsoti za $\dot{\mathbf{x}}_j(t)$ preuredimo po potencah spremenljivke t , dobimo člene v vsoti za $A\mathbf{x}_j(t)$. Zato je $\dot{\mathbf{x}}_j(t) = A\mathbf{x}_j(t)$.

Homogeni linearni sistemi na ravnini $\mathbb{R}^2$

Ogledali si bomo vse možne primere obnašanja linearnih sistemov s konstantno matriko na ravnini $\mathbb{R}^2$.

Naj bo A realna 2×2 matrika. Za njeno Jordanovo normalno formo J so možni naslednji trije primeri.

❶ $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

❷ $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

❸ $J = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$

Oglejmo si rešitve linearnega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x}$$

v vseh treh primerih. Pri študiju kvalitativnega obnašanja rešitev moramo ločevati podprimere glede na predznake lastnih vrednosti, oziroma predznak realnega dela $a = \Re \lambda$ v primeru kompleksne lastne vrednosti.

Primer 1: diagonalna matrika, realni lastni vrednosti

Naj bo

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Rešitve problema $\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x}$ so

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Zadošča obravnavati rešitve v zaprtem prvem kvadrantu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$; njihove zrcalne slike preko obeh koordinatnih osi so prav tako tokovnice.

Primer 1A: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Označimo $\mu = \lambda_2/\lambda_1 > 0$. Tedaj je

$$|x_1(t)|^{-\mu} x_2(t) = |c_1|^{-\mu} c_2 e^{(-\mu\lambda_1 + \lambda_2)t} = |c_1|^{-\mu} c_2.$$

Funkcija $u(x_1, x_2) = |x_1|^{-\mu} x_2$ je prvi integral sistema in tokovnice so grafi

$$x_2 = c \cdot |x_1|^\mu, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Prav tako sta tokovnici oba poltraka vsake od koordinatnih osi.

Izhodišče $(0, 0)$ je odbojna negibna točka. Pri $t \rightarrow +\infty$ se vsaka točka

$(x_1(t), x_2(t))$ z začetno pozicijo $(x_1(0), x_2(0)) \neq (0, 0)$ oddaljuje proti ∞ , pri $t \rightarrow -\infty$ pa se približuje $(0, 0)$. Vsa ravnina je **nestabilni prostor**, $E_n = \mathbb{R}^2$.

Primer 1: diagonalna matrika, realni lastni vrednosti

Primer 1B: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Ta primer ima isti fazni portret kot primer 1A, le da je smer toka na vsako tokovnici obrnjena. Izhodišče $(0, 0)$ je sedaj privlačna negibna točka toka. Pri $t \rightarrow +\infty$ gre točka $(x_1(t), x_2(t))$ s poljubno začetno pozicijo proti $(0, 0)$. Vsa ravnina je **stabilni prostor**, $E_s = \mathbb{R}^2$.

Primer 1C: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Označimo $\mu = -\lambda_2/\lambda_1 > 0$. Kot prej vidimo, da je funkcija $u(x_1, x_2) = |x_1|^\mu x_2$ prvi integral sistema. Tokovnice so hiperbole

$$|x_1|^\mu x_2 = \text{konst.}, \quad \mu = -\lambda_2/\lambda_1 > 0.$$

Na desni polravnini $x_1 > 0$ se tok na vsaki tokovnici pomika na desno, na levi polravnini pa na levo. Za vsako začetno pozicijo z $x_1(0) \neq 0$ gre prva koordinata $x_1(t)$ proti $\pm\infty$, odvisno od znaka $x_1(0)$. Druga koordinata $x_2(t)$ gre vselej proti 0, ko $t \rightarrow +\infty$.

Koordinatna x_2 -os se imenuje **stabilni podprostor** sistema, $E_s = \{x_1 = 0\}$, saj je invarianten za tok in se le-ta približuje izhodišču, ko gre $t \rightarrow +\infty$.

Koordinatna x_1 -os pa je **nestabilni podprostor** sistema, $E_n = \{x_2 = 0\}$, saj je invariantna za tok in le-ta se na njej približuje izhodišču, ko gre $t \rightarrow -\infty$.

Sistem z nasprotno predznačenimi lastnima vrednostima (ena pozitivna in druga negativna) se imenuje **hiperboličen**.

Primer 1: diagonalna matrika, realni lastni vrednosti

Primer 1D: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Sistem je

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = 0.$$

Tok je

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2.$$

Tovnice so desne in leve polovice premic $x_2 = c$ (prekinjene so pri $x_1 = 0$, torej na x_2 -osi). V tem primeru se x_2 -os imenuje **centralni podprostor**,

$$E_c = \{x_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R},$$

saj tok na njej miruje.

Če je $\lambda_1 > 0$, potem se vsaka tokovnica izven x_2 -osi ($c_1 \neq 0$) oddaljuje v $\pm\infty$, ko $t \rightarrow +\infty$, ter se približuje x_2 -osi, ko $t \rightarrow -\infty$. Tedaj je

$$E_n = \{x_2 = 0\} = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Pri $\lambda_1 < 0$ dobimo ravno obratno sliko in je $E_s = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Primer 1E: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. V tem primeru tok miruje, vsaka tokovnica je točka. Centralni podprostor je celotna ravnina, $E_c = \mathbb{R}^2$.

Primer 2: Jordanova kletka

Jordanova matrika

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ustreza sistemu

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2.$$

Formulo za rešitev z začetnim pogojem (c_1, c_2) že poznamo:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Konstruktivno (brez uporabe formule) jo najdemo tako, da najprej rešimo drugo enačbo, ki je neodvisna od x_1 , dobimo $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$, nato pa to funkcijo vstavimo v prvo enačbo in dobimo nehomogeno linearno enačbo za $x_1(t)$:

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1(t) + c_2 e^{\lambda t}.$$

Rešitev najdemo z nastavkom $x_1(t) = C(t)e^{\lambda t}$ (variacija konstante).

Primer 2: Jordanova kletka

Primer 2A: $\lambda = 0$. Tokovnice so premice

$$x_1(t) = c_1 + c_2 t, \quad x_2(t) = c_2.$$

Na x_1 -osi tok miruje. Pri vrednosti $x_2(t) = c_2 > 0$ se točka pomika na desno s hitrostjo c_2 , pri $c_2 < 0$ pa se pomika na levo s hitrostjo $|c_2| = -c_2$. Vsa ravnina je centralni podprostor, $E_c = \mathbb{R}^2$, saj sta obe lastni vrednosti matrike enaki 0.

Primer 2B: $\lambda < 0$. Sedaj je pri $t \rightarrow \pm\infty$ dominanten člen $e^{\lambda t}$. Vse tokovnice gredo proti $(0, 0)$ pri $t \rightarrow +\infty$. Izhodišče $(0, 0)$ je torej privlačna točka in stabilni podprostor je $E_s = \mathbb{R}^2$. Pri $t \rightarrow -\infty$ pa se vse tokovnice izven $(0, 0)$ oddaljujejo v neskončnost.

Premica $x_2 = 0$ (x_1 -os) sestoji iz treh trajektorij (oba poltraka ter točka $(0, 0)$), torej je invariantna množica toka.

Za $c_2 \neq 0$ (začetna točka leži izven x_1 -osi) imamo

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{c_1}{c_2} + t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty.$$

Primer 2: Jordanova kletka

Prva komponenta in njen odvod sta

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t), \\ \dot{x}_1(t) &= e^{\lambda t}(\lambda(c_1 + c_2 t) + c_2) = e^{\lambda t}(\lambda c_1 + c_2 + \lambda c_2 t).\end{aligned}$$

Odtod vidimo, da vsaka trajektorija s $c_2 > 0$ vstopi v prvi kvadrant pri času $t_0 = -c_1/c_2$ in tam ostane za vse $t > t_0$, pri času

$$t_1 = -\frac{\lambda c_1 + c_2}{\lambda c_2} = t_0 - \frac{1}{\lambda} > t_0$$

obrne x_1 -smer in se pri $t \rightarrow +\infty$ asimptotično približuje x_1 -osi (ker je $x_2(t)/x_1(t) \rightarrow 0$) in točki $(0,0)$ z desne. Nobena trajektorija na zgornji polravnini se ne približuje negativnemu delu x_1 -osi.

Za trajektorije na spodnji polravnini (začetni pogoj $c_2 < 0$) velja ravno nasprotno: pri velikih $t > 0$ je $x_1(t) < 0$, $\dot{x}_1(t) > 0$, zato se trajektorija asimptotično približuje x_1 -osi in točki $(0,0)$ z leve. Nobena trajektorija na spodnji polravnini se ne približuje pozitivnemu delu x_1 -osi.

Primer 2C: $\lambda > 0$. Imamo podoben fazni portret in dinamiko kot v primeru 2B pri obratu časa $t \mapsto -t$. Izhodišče je sedaj odbojna točka in $E_n = \mathbb{R}^2$.

Modificirana Jordanova kletka

Če bi namesto standardne Jordanove kletke obravnavali sistem z matriko

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

v limitnem primeru $\mu = 0$ dobimo rešitve

$$(x_1(t), x_2(t)) = e^{\lambda t}(c_1, c_2)$$

in fazni portret sestavljajo premice skozi izhodišče.

Pri vseh $\mu \neq 0$ (tudi majhnih) pa dobimo fazni portret, podoben tistemu z $\mu = 1$, le da za spremenjene vrednosti konstant v rešitvah. Pri prehodu $\mu \rightarrow 0$ se ključne spremembe dogajajo pri vedno večjih $\pm t$ (odvisno od znaka λ), torej v vedno manjših okolicah točke $(0, 0)$.

Na tem primeru vidimo, da se pri majhni spremembi parametra μ v sistemu pri $\mu = 0$ njegov fazni portret kvalitativno spremeni.

Kljub temu, da so rešitve zvezno odvisne od parametrov, se njihovo globalno obnašanje pri $t \rightarrow \pm\infty$ lahko nezvezno spremeni. Gre torej za nestabilnost sistema (bifurkacije) pri majhnih perturbacijah.

Primer 3: Kompleksna lastna vrednost

Sedaj je

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$$

Ta matrika je konjugirana realni matriki

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Če označimo koordinate na ravnini z (x, y) in uvedemo kompleksno spremenljivko

$$z = x + iy \in \mathbb{C},$$

lahko prirejeni sistem diferencialnih enačb za x in y :

$$\dot{x} = ax - by, \quad \dot{y} = bx + ay$$

zapišemo v kompleksni obliki

$$\dot{z} = \lambda z.$$

Primer 3: Kompleksna lastna vrednost

Njena rešitev je z začetnim pogojem $z(0) = z_0 = c_0 + ic_1$ je

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\lambda t} z_0 \\ &= e^{at+ibt} (c_0 + ic_1) \\ &= e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)) (c_0 + ic_1) \\ &= e^{at} (\cos(bt)c_0 - \sin(bt)c_1 + i(\sin(bt)c_0 + \cos(bt)c_1)). \end{aligned}$$

V realnem zapisu in upošteva je $z(t) = x(t) + iy(t)$ dobimo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Matrika

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

predstavlja rotacijo na $\mathbb{R}^2$ za kot t v pozitivni smeri.

Dinamika sistema s kompleksno lastno vrednostjo

Sedaj lahko opišemo dinamiko rešitev in fazni portret sistema.

Primer 3A: $a = \Re \lambda = 0$.

Tokovnice so krožnice s središčem v izhodišču, na katerih tok kroži s kotno hitrostjo $|b|$ v pozitivni (levi) smeri, če je $b > 0$ in v negativni (desni) smeri, če je $b < 0$. Vsa ravnina je centralni podprostor: $E_c = \mathbb{R}^2$. Kritična točka $(0,0)$ s takim faznim portretom se imenuje **(nevtralni) fokus**.

Primer 3B: $a < 0$.

Tokovnice so spirale, ki krožijo s kotno hitrostjo b in se hkrati približujejo izhodišču s faktorjem e^{at} . V tem primeru je $(0,0)$ privlačna negibna točka (**stabilni fokus**) in vsa ravnina je stabilni podprostor: $E_s = \mathbb{R}^2$.

Primer 3C: $a > 0$.

Tokovnice so spirale, ki krožijo s kotno hitrostjo b in se hkrati oddaljujejo od izhodišča s faktorjem e^{at} . V tem primeru je $(0,0)$ odbojna negibna točka (**nestabilni fokus**) in vsa ravnina je nestabilni podprostor: $E_n = \mathbb{R}^2$.