

Zaporedje - zbiranje

Sporočimo se pojma limite:

A je limita $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, če za vsa $\varepsilon > 0$ obstaja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tako da velja:

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |A - a_n| < \varepsilon$$
$$a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

Primer:

Oglejmo si zaporedje $\{(1 - \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$

Torej: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$,

Limita tega rešitve ugotovimo, če napišemo prve nekaj členov zaporedja:

$$a_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$o_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_5 = \frac{2}{5}$$

$$a_k = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}.$$

Donnerstag: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1.$

Ösk 27' mas: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$.

12. Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ gilt: m_ε ist eine ε -Näherung an m .

$$n > m_\varepsilon \Rightarrow \left| \underset{\substack{'' \\ A}}{1} - \underset{\substack{'' \\ g_m}}{(1 - \frac{1}{n})} \right| < \varepsilon$$

$$\left| 1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Seems like m_2 & k_2 keep 50 refs:

$$m \succ m_{\{ \Rightarrow \frac{1}{3} < m$$

$$\text{Vzemimo } m_\varepsilon = 1 + \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$$

Pri tem $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ označuje **celi del** realnega števila $\frac{1}{\varepsilon}$

Def: x je **poljubno** realno število, zapisano v decimalni obliki

$$x = m_x, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$$

$$\pi = 3, 14 \dots$$

Celi del števila x je m_x .

("stara notacija vse decimalke").

Takoj opazimo: če vsake realno število velja

$$\lfloor x \rfloor + 1 > x$$

Vzemimo se k našemu primeru:

Iščemo m_ε . Torej:

$$m_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

ker: $m_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

Nij ko wój $m > m_\varepsilon$. Trudimo

$$|1 - a_m| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{m} < \varepsilon \quad ?$$

Od tad sledi

$$m > \frac{1}{\varepsilon} \quad ?$$

ker j

$$m_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$$

in

$$m > m_\varepsilon ,$$

nes refi

$$m > \frac{1}{\varepsilon}$$

o žimo

$$\frac{1}{m} < \varepsilon$$

žimo

$$|1 - (1 - \frac{1}{m})| < \varepsilon$$

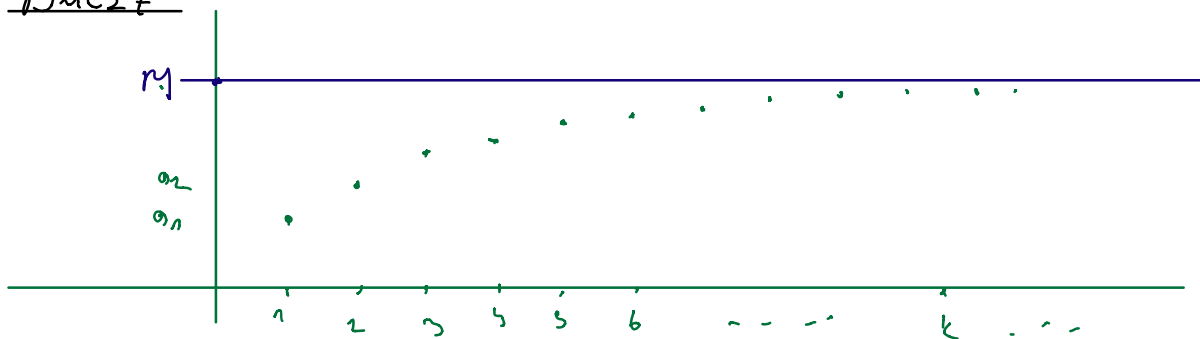
č.e.j. le $n > n_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$.

Torej: našli smo iskani n_ε in s tem dokazali, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$.

Izrek: Vsako monotonno omejeno zaporedje in niz je konvergentno - torej ima limito.

Limita takega zaporedja je supremum (m.k.m. zaporedja) tega zaporedja.

Dokaz



Naj $\epsilon > 0$ poljubno število. Najti moramo
 naravno število n_ϵ $\exists$: (tako, da)

$$n > n_\epsilon \Rightarrow |M - a_n| < \epsilon$$

Vzemimo torej n ϵ število ϵ . Po definiciji
 supremuma vemo, da obstaja vsaj en člen a_n
 zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, za katerega velja:

$$a_n > M - \epsilon$$

Ker pa zaporedje narašča, imamo:

$$M - \epsilon < a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq a_{n+3} \leq \dots \leq a_m \leq \dots \leq M$$

Torej vsi ti členi ležijo v množici

$$(M - \epsilon, M] \subset (M - \epsilon, M + \epsilon)$$

Torej: Za a_{n_ϵ} lahko vzamemo a_m .
ostanek za n_ϵ lahko vzamemo m

Ž2 $a_{m_\varepsilon} = a_m$ res ref2:

$$m > m = m_\varepsilon \Rightarrow |a_m - M| < \varepsilon$$

$$a_m \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$$

Torej: našli smo iskani m_ε . Bole, upokili
smo, da m_ε res dostaja. $\square$

Izrek: Nij bo S sklenišče zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Po tem obstaja podzaporedje $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, iz
kater ref2:
$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = S.$$

Dokaz: Podzaporedje oblik, tako, da izberemo
samo nekatere člene v prvotnem zaporedju.

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ & b_1 & & b_2 & b_3 & & b_4 & b_5 \end{array}$$

Pomenbus: Tudi v podzaporedju mora
biti neskončno mnogo členov.

Konstruiramo podzaporedje $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ z zahtevano
lastnostjo:

Nj ko $\varepsilon_1 > 0$ najbo šlo: Ker je
 S sklenjena $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, po def. obstaja
vsaj en a_{m_1} , da velja

$$|S - a_{m_1}| < \varepsilon_1$$

Torej obstaja tudi vsaj en a_{m_2} $\exists$:

$$|S - a_{m_2}| < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

...

a_{m_3} $\exists$:

$$|S - a_{m_3}| < \frac{\varepsilon_1}{3}$$

$\vdots$

De finijmo novo zaporedje $b_1 = a_{m_1}, b_2 = a_{m_2}, \dots$

$$\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{a_{m_m}\}_{m \in \mathbb{N}}.$$

Še bolj je lahko videti, da ji v resnici, če
tako mnogi sklici S neskončno mnogo
členov $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, znanj te sklice po
jih je le končno mnogo.

Raz: Myko $\varepsilon > 0$ pofuleni: Obstaja k ,
tako da je $\frac{\sum_k}{k} < \varepsilon$.

□

Pozledica: V vsakem omejenem zaporedju
je lahko več konvergentnih podzaporedij.
Z vsake steklišče dostajajo podzaporedja, ki
konvergirajo k tem stekliščem.

Dolcaz: Videti smo, da ima vsako omejeno zaporedje
vsaj eno steklišče.

Operacje z zapyrzedziami:

Def: Nij liczb $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ i $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ zapyrzedzi:

1.) Suma dwóch zapyrzedzi j' potuz s podzsum

$$\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} + \{b_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{a_m + b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$$

2.) Produkt zapyrzedzi s skalarzem: Nij $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cdot \{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{\alpha a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$$

3.) Produkt zapyrzedzi:

$$\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} \cdot \{b_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{a_m \cdot b_m\}_{m \in \mathbb{N}}.$$

4.) Kocient zapyrzedzi:

$$\frac{\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}}{\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}} = \left\{ \frac{a_m}{b_m} \right\}_{m \in \mathbb{N}}.$$

Operacja: Różnica zapyrzedzi:

$$\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} - \{b_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{a_m - b_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} + (-1)\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$$

Izrek: Naj bodez $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

konvergentni zaporedji. Potem velja:

$$1.) \lim_{n \rightarrow \infty} (\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} + \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}$$

$$2.) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$3.) \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}$$

4.) Naj bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq 0$. Tedaj velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}}{\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$$

Druge izpisi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

Dokaz: Dokažimo teorem 1.

Izaberimo neki $\varepsilon > 0$. Poiskladi moramo n_ε ,
takvo da bismo imali:

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |(A+B) - (a_n + b_n)| < \varepsilon,$$

koje smo označili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$$

Dokazimo da izraz $|(A+B) - (a_n + b_n)|$:

$$|(A+B) - (a_n + b_n)| = |A+B - a_n - b_n| =$$

$$= |(A - a_n) + (B - b_n)| \leq$$

$$\leq |A - a_n| + |B - b_n|$$

$$|(A+B) - (a_n + b_n)| \leq |A - a_n| + |B - b_n|$$

Ker $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira k A , obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$, tako da velja:

$$n > n_1 \Rightarrow |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

" " $n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ "

Na isti način vidimo, da obstaja $n_2 \in \mathbb{N}$, tako da velja:

$$n > n_2 \Rightarrow |B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definirajmo naš iskani n_ε tako:

$$n_\varepsilon := \max \{ n_1, n_2 \}$$

Torej imamo:

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |(A+B) - (a_n + b_n)| \leq$$

$$\leq |A - a_n| + |B - b_n| < \varepsilon$$

$\text{ke } n \geq n_1 \qquad \text{ke } j \geq n_2$
 $\nwarrow \frac{\varepsilon}{2} \qquad \nwarrow \frac{\varepsilon}{2}$

Torej: našli smo iskani n_2 in s tem dokazali da je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= A + B = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A + \lim_{n \rightarrow \infty} B. \end{aligned}$$

Točka 2.) lahko dokazate na drugo metodo.

Dokaz točke 3.) je nekoliko težji, upoštevati je treba enakost:

$$|AB - a_n b_n| = |(a_n - A)(b_n - B) + A(b_n - B) + B(a_n - A)|$$

□

Cauchy jērs kstnost

Definīcija: $\mathbb{N}$ j k $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ izpildj.

Izpildj $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ j Cauchy jērs, ē veljz:

Es velk $\varepsilon > 0$ skajz stēils $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$,
tāks ka velz:

$$n_1, n_2 > n_\varepsilon \Rightarrow |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon.$$

Izrak: Izpildj $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reālū stēil
j konverģentus natzēns tēdj, ko j Cauchy jērs,

Tz itēls podjz mēda nāpamēnējzē kstnost
mēstāce $\mathbb{R}$ reālū stēil:

V mēstāci $\mathbb{R}$ j vāks Cauchy jērs bāp. tūbi
konverģentus:

V mēstāci $\mathbb{Q}$ k nī res.