Determinante, 3. del

Cramerovo pravilo

Cramerovo pravilo je eksplicitna formula za rešitev sistema linearnih enačb

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

v primeru, ko je A kvadratna matrika z neničelno determinanto.

Naj bo n število stolpcev matrike A. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ označimo z $A_i(\mathbf{b})$ matriko, ki jo dobimo iz matrike A tako, da njen i-ti stolpec zamenjamo z vektorjem $\mathbf{b}$.

Izrek - Cramerovo pravilo

Če je A $n \times n$ matrika z $\det A \neq 0$, potem je rešitev sistema (1) podana z

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Dokaz. Naj bodo $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ stolpci matrike A. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ je

$$A_i(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Definirajmo še matriko

$$I_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \ldots & \mathbf{e}_{i-1} & \mathbf{x} & \mathbf{e}_{i+1} & \ldots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$$

kjer so $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ stolpci identične matrike I in je $\mathbf{x}$ rešitev sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Opazimo, da velja

$$\begin{aligned} A\,I_i(\mathbf{x}) &= A\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \ldots & \mathbf{e}_{i-1} & \mathbf{x} & \mathbf{e}_{i+1} & \ldots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & \ldots & A\mathbf{e}_{i-1} & A\mathbf{x} & A\mathbf{e}_{i+1} & \ldots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \\ &= A_i(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Odtod sledi

$$\det A \det I_i(\mathbf{x}) = \det A_i(\mathbf{b}).$$

Z razvojem $\det I_i(\mathbf{x})$ po i-ti vrstici dobimo še $\det I_i(\mathbf{x}) = x_i$.

Reševanje 2×2 sistema s Cramerovim pravilom

Rešimo naslednji sistem s Cramerovim pravilom:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1, \\ x + 3y &= 2. \end{aligned}$$

Rešitev se glasi

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}} = \frac{\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{-5}{5} = -1,$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Reševanje 3×3 sistema s Cramerovim pravilom

S pomočjo Cramerovega pravila rešimo sistem

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x - y &= 1 \\ 3y + z &= -1. \end{aligned}$$

Ker je

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 9,$$

je rešitev sistema

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{2}{9},$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{-5}{9},$$

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Formula za inverz matrike

Vemo, da ima kvadratna matrika A inverz natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$. Vemo tudi, kako A^{-1} poiščemo z Gaussovo metodo. Nimamo pa še eksplicitne formule za A^{-1}. Izpeljali jo bomo s Cramerovim pravilom.

Definicija kofaktorske matrike

Naj bo A kvadratna matrika. Če v matriki A vsak element $a_{i,j}$ zamenjamo z njegovim **kofaktorjem** $(-1)^{i+j} \det A_{i,j}$, dobimo **kofaktorsko matriko** matrike A. Oznaka zanjo je $\tilde{A}$. (Spomnimo se, da matriko $A_{i,j}$ dobimo tako, da v matriki A pobrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec.)

Primer kofaktorske matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} ei - fh & fg - di & dh - eg \\ ch - bi & ai - cg & bg - ah \\ bf - ce & cd - af & ae - bd \end{bmatrix}$$

Izrek - Formula za A^{-1}

Naj bo A $n \times n$ matrika, ki zadošča $\det A \neq 0$. Potem velja

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T \tag{3}$$

kjer je $\tilde{A}$ kofaktorska matrika matrike A.

Dokaz: Matrika A^{-1} je rešitev matrične enačbe

$$AX = I.$$

Naj bodo $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ stolpci matrike X. Potem velja

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 \quad \ldots \quad A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$$

kjer so $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ stolpci matrike I.

Vzemimo poljubna i in j in izračunajmo (i,j)-ti element matrike X. Velja

$$x_{i,j} = i\text{-ti element vektorja } \mathbf{x}_j = \frac{\det A_i(\mathbf{e}_j)}{\det A}$$

Pri drugem enačaju smo uporabili Cramerovo pravilo za sistem $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$.

Determinanto $B = A_i(\mathbf{e}_j)$ izračunamo z razvojem po i-tem stolpcu:

$$\det B = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} b_{k,i} \det B_{k,i}$$

Upoštevamo, da je $B_{k,i} = A_{k,i}$ in da je

$$b_{k,i} = k\text{-ti element } \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

pa dobimo

$$\det A_i(\mathbf{e}_j) = (-1)^{i+j} \det A_{j,i}$$

odkoder sledi

$$x_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{j,i}}{\det A} = \frac{1}{\det A} (\text{kofaktor } a_{j,i})$$

Torej je res

$$A^{-1} = X = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

Primer - Inverz 2×2 matrike

Če je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

potem je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Primer - Inverz 3×3 matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

kjer $\det A = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$.

Determinante in permutacije

Za vsako naravno število n označimo $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Za vsako preslikavo $\sigma\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ so ekvivalentne naslednje lastnosti:

- σ je injektivna (=slika različne elemente v različne elemente),
- σ je surjektivna (=vsak element je slika nekega elementa),
- σ je bijektivna (=injektivna in surjektivna).

Preslikavi, ki zadošča eni od teh treh ekvivalentnih lastnosti, pravimo **permutacija** množice $\mathbb{N}_n$. Množico vseh permutacij $\mathbb{N}_n$ označimo s S_n.

Primeri permutacij

Vseh preslikav iz $\mathbb{N}_3$ v $\mathbb{N}_3$ je 27. Od teh jih je 6 bijektivnih:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Naj bo $\mathbf{e}_i$ stolpčni vektor vellikosti n, ki ima na i-tem mestu enko, drugod pa same ničle. Vsaki permutaciji $\sigma \in S_n$ priredimo matriko

$$P_\sigma := \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\sigma(1)} & \mathbf{e}_{\sigma(2)} & \dots & \mathbf{e}_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

Determinanti te matrike pravimo **signatura** permutacije σ. Oznaka je

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \det P_\sigma.$$

Primeri

Če za σ vzamemo identično preslikavo, dobimo $P_\sigma = I$ in $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.

Če za σ vzamemo **transpozicijo** elementov i in j, se pravi permutacijo

$$\sigma(k) = \begin{cases} j & \text{če } k = i \\ i & \text{če } k = j \\ k & \text{če } k \neq i, j \end{cases}$$

dobimo $P_\sigma = P_{i,j}$ in $\operatorname{sgn}(\sigma) = \det P_{i,j} = -1$.

Signature permutacij iz S_3

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det I = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det P_{1,2} = -1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det P_{1,3} = -1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det P_{2,3} = -1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Dokažimo najprej, da za vsako permutacijo σ velja

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$$

Najprej opazimo, da velja

$$\begin{aligned}
P_\sigma^T P_\sigma &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\sigma(1)}^T \\ \mathbf{e}_{\sigma(2)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{\sigma(n)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\sigma(1)} & \mathbf{e}_{\sigma(2)} & \dots & \mathbf{e}_{\sigma(n)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(1)} \rangle & \langle \mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)} \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(n)} \rangle \\ \langle \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \mathbf{e}_{\sigma(1)} \rangle & \langle \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)} \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \mathbf{e}_{\sigma(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_{\sigma(n)}, \mathbf{e}_{\sigma(1)} \rangle & \langle \mathbf{e}_{\sigma(n)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)} \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_{\sigma(n)}, \mathbf{e}_{\sigma(n)} \rangle \end{bmatrix} \\
&= I
\end{aligned}$$

Odtod sledi, da je

$$(\det P_\sigma)^2 = \det P_\sigma^T \, \det P_\sigma = \det P_\sigma^T P_\sigma = \det I = 1$$

Pokažimo še, da za vsaki permutaciji σ in τ velja

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)$$

Očitno za vsak i velja

$$P_\sigma \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{\sigma(i)}.$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned} P_\sigma P_\tau &= P_\sigma \left[\ \mathbf{e}_{\tau(1)}, \mathbf{e}_{\tau(2)}, \ldots, \mathbf{e}_{\tau(n)} \ \right] \\ &= \left[\ P_\sigma \mathbf{e}_{\tau(1)}, P_\sigma \mathbf{e}_{\tau(2)}, \ldots, P_\sigma \mathbf{e}_{\tau(n)} \ \right] \\ &= \left[\ \mathbf{e}_{\sigma(\tau(1))}, \mathbf{e}_{\sigma(\tau(2))}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(\tau(n))} \ \right] \\ &= P_{\sigma \circ \tau} \end{aligned}$$

Če uporabimo determinanto na obeh straneh, dobimo želeno formulo.

Explicitna izražava determinante

Radi bi dokazali naslednjo formulo

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} \tag{4}$$

Primer

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} +$$

$$+ \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} +$$

$$+ \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$$

Ideja dokaza je, da vsako vrstico matrike A izrazimo kot

$$\begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, \mathbf{e}_j^T$$

in nato upoštevamo linearnost determinante v tej vrstici. Dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \sum_{j_1=1}^{n} a_{i,j_1}\, \mathbf{e}_{j_1}^T \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{i,j_n}\, \mathbf{e}_{j_n}^T \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_n=1}^{n} a_{i,j_1} \cdots a_{i,j_n} \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{j_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{j_n}^T \end{bmatrix} = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in(\mathbb{N}_n)^n} a_{i,j_1} \cdots a_{i,j_n} \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{j_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{j_n}^T \end{bmatrix}$$

Če sta dve izmed števil $j_1, \ldots, j_n$ enaki, potem je

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{j_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{j_n}^T \end{bmatrix} = 0,$$

ker ima determinanta dve vrstici enaki. Če pa so števila $j_1, \ldots, j_n$ paroma različna, potem je funkcija, ki pošlje vsak k v j_k, injektivna, se pravi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} \in S_n$$

V tem primeru je

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{j_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{j_n}^T \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{j_1} & & \mathbf{e}_{j_n} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

Dokazali smo, da velja

$$\det A = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{smallmatrix}\right) \in S_n} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} a_{i,j_1} \cdots a_{i,j_n}$$

kar na kratko zapišemo kot

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}$$