

2. sklop dodatnih vaj iz Mehanike 1

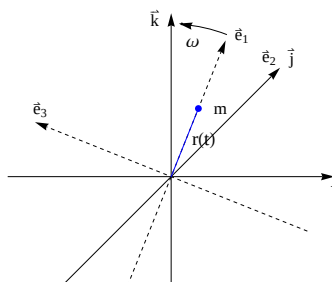
- (1) Palica se vrti v navpični ravnini s konstantno kotno hitrostjo ω . Po palici se brez trenja giblje točka z maso m pod vplivom sile teže v navpični smeri.
- (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.
- (b) Naj bo materialna točka ob začetnem trenutku na razdalji $r_0 = \frac{g}{2\omega^2}$ od izhodišča v vodoravni smeri in naj nima hitrosti v radialni smeri. Izračunaj, kako se giblje točka med vrtenjem palice.

Rešitev:

- (a) Po komponentah se Newtonove enačbe glasijo:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 : \quad m\ddot{r} &= m\omega^2 r - mg \sin \omega t, \\ \vec{e}_2 : \quad F_2 &= 0, \\ \vec{e}_3 : \quad F_3 &= mg \cos \omega t + 2m\omega \dot{r}.\end{aligned}$$

- (b) $r(t) = r_0(e^{-\omega t} + \sin \omega t)$.



- (2) Parabola, ki je v začetnem trenutku podana s sistemom enačb $z = \frac{1}{2}\alpha x^2$ in $y = 0$ za $\alpha > 0$, se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti okoli osi z , po njej pa se brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri giblje točka z maso m .
- (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.
- (b) Točko poženemo s temena parabole s hitrostjo v_0 . Kakšna je maksimalna višina, ki jo točka doseže med gibanjem, če je $\alpha g > \omega^2$?

Rešitev:

- (a) Newtonov zakon lahko v relativnem koordinatnem sistemu zapišemo v obliki

$$m\ddot{s}\vec{e}_t + m\kappa\dot{s}^2\vec{e}_n = -\frac{mg\alpha x}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}}\vec{e}_t - \frac{mg}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}}\vec{e}_n + F_n\vec{e}_n + F_b\vec{e}_b - 2m\omega\dot{x}\vec{e}_2 + m\omega^2 x\vec{e}_1.$$

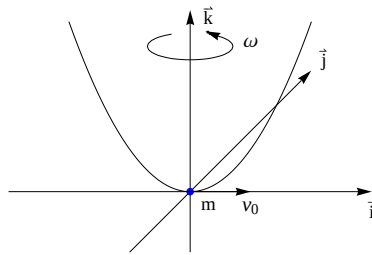
(b) V tangentialni smeri dobimo enačbo

$$m\ddot{s} = -\frac{mg\alpha x}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}} + \frac{m\omega^2 x}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}},$$

ki jo lahko integriramo do zakona o ohranitvi energije

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mg\alpha x^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E.$$

Od tod dobimo, da je $h_{max} = \frac{1}{2} \frac{\alpha v_0^2}{\alpha g - \omega^2}$.

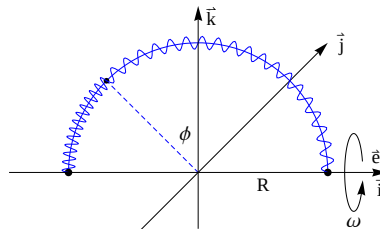


- (3) Polobroč s polmerom R se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti okoli osi, ki gre skozi njegovi krajišči. Po njem se brez trenja giblje točka z maso m , ki je preko dveh vzmeti vzdolž polobroča pripeta na obe njegovi krajišči. Vzmeti imata koeficient k in neraztegnjeno dolžino l .

- (a) Reduciraj gibanje na premočrtno gibanje polarne kota.
(b) V odvisnosti od kotne hitrosti ω poišči ravnovesne lege in ugotovi, ali so stabilne.

Rešitev:

- (a) $\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + kR^2\phi^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \cos^2 \phi = E$,
(b) Ravnovesna lega je pri $\phi = 0$ in je za vsak ω stabilna.



- (4) Obroč s polmerom R , ki leži v vodoravni ravnini, se enakomerno vrti s kotno hitrostjo ω okrog navpične osi, ki gre skozi točko na obodu obroča. Po obroču se brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri giblje točka z maso m .

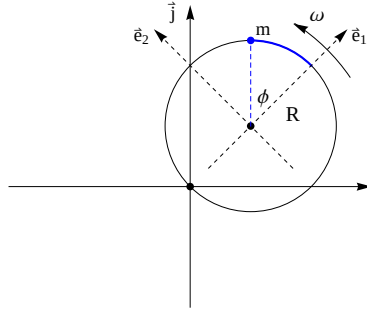
- (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.

- (b) Denimo, da je v začetnem trenutku masna točka diametralno nasproti točke okrog katere se obroč vrti in da miruje glede na obroč. Pokaži, da točka med vrtenjem obroča miruje glede na obroč.

Rešitev:

- (a) Vektorska oblika Newtonovih enačb v RKS se glasi

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{obroča}} + mR\omega \cos \phi(2\dot{\phi} + \omega) \vec{e}_1 + mR\omega \sin \phi(2\dot{\phi} + \omega) \vec{e}_2 + m\omega^2 R \vec{e}_1.$$

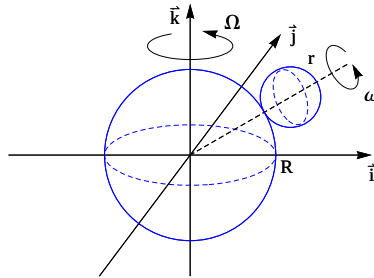


- (5) Homogena krogla z maso m in s polmerom r je vrtljivo pritrjena na votlo sfero s polmerom R . V začetnem trenutku ima sfera enačbo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

krogla pa se je dotika v točki $T(R \cos \theta, 0, R \sin \theta)$ za nek $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Sfera se vrti s kotno hitrostjo Ω okoli navpične osi, krogla pa se hkrati vrti še okoli simetrijske osi, ki poteka skozi dotikališče, s kotno hitrostjo ω . Izračunaj vektor kotne hitrosti vrtenja krogle.

Rešitev: $\vec{\omega}'(t) = \omega \cos \Omega t \cos \theta \vec{i} + \omega \sin \Omega t \cos \theta \vec{j} + (\Omega + \omega \sin \theta) \vec{k}$.



- (6) Homogen stožec z maso m , polmerom R in višino $h = R$ se enakomerno kotali po podlagi, tako da je vrh stožca vpet v točki, ki je na višini R nad podlago. Kotna hitrost precesije stožca je ω .

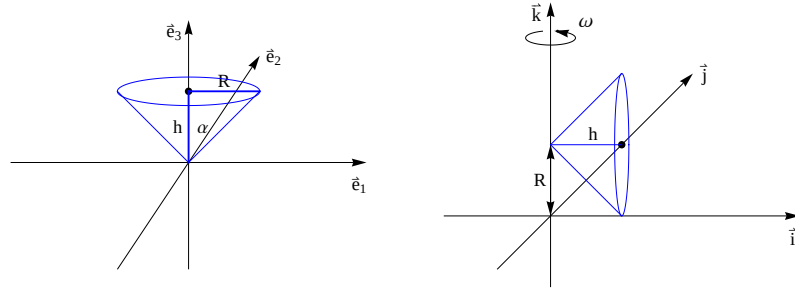
- (a) Izračunaj vektor kotne hitrosti in rotacijski vektor.

(b) Izračunaj kinetično energijo stožca.

Rešitev:

(a) $\vec{\omega}'(t) = -\omega \cos \omega t \vec{i} - \omega \sin \omega t \vec{j} + \omega \vec{k}$, $\vec{\omega}(t) = -\omega \cos \omega t \vec{e}_1 - \omega \sin \omega t \vec{e}_2 - \omega \vec{e}_3$.

(b) $T = \frac{21}{40} m \omega^2 R^2$.



(7) Homogen disk z maso m in s polmerom R precesira okoli navpične osi s kotno hitrostjo Ω , okoli lastne osi pa se vrtil s kotno hitrostjo ω . Težišče diska je na razdalji d od osi precesije.

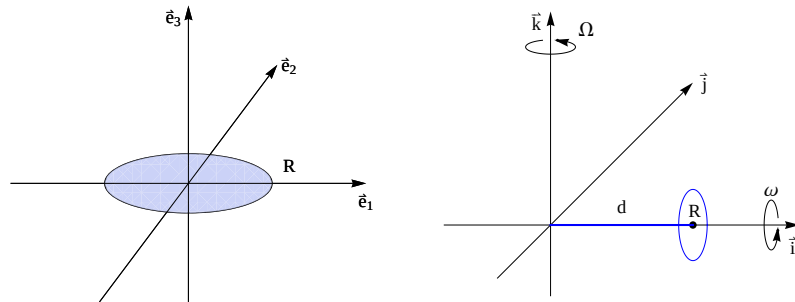
(a) Izračunaj vektor kotne hitrosti in rotacijski vektor vrtenja.

(b) Izračunaj kinetično energijo diska.

Rešitev:

(a) $\vec{\omega}'(t) = \omega \cos \Omega t \vec{i} + \omega \sin \Omega t \vec{j} + \Omega \vec{k}$, $\vec{\omega}(t) = -\Omega \cos \omega t \vec{e}_1 + \Omega \sin \omega t \vec{e}_2 + \omega \vec{e}_3$.

(b) $T = \frac{1}{2} m \left(d^2 \Omega^2 + \frac{1}{4} R^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} R^2 \omega^2 \right)$.



(8) Homogena kocka z maso m in s stranico dolžine a se enakomerno vrtil s kotno hitrostjo ω okoli ene od svojih stranic.

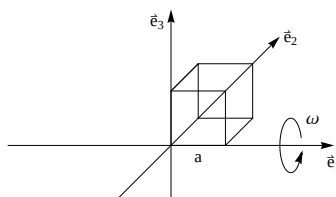
(a) Izračunaj vztrajnostni tenzor kocke glede na oglišče.

(b) Izračunaj kot med vektorjema kotne hitrosti in vrtilne količine.

Rešitev:

$$(a) \quad J_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 \end{bmatrix},$$

$$(b) \quad \phi = \arccos \frac{8}{\sqrt{82}}.$$



- (9) Homogena kocka z maso m je podana s predpisom

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}, \quad a > 0.$$

Kocko vrtljivo vpneemo okoli y -osi in jo pustimo, da se vrtil pod vplivom homogene sile teže v smeri z -osi. Zapiši Eulerjeve enačbe in nato približno izračunaj frekvenco nihanja kocke okoli ravnovesne lege.

Rešitev: V smeri y -osi dobimo enačbo

$$2ma^2\ddot{\phi} + \frac{3\sqrt{2}}{2}mag \sin \phi = 0.$$

Od tod dobimo frekvenco nihanja $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{2}a}}$.

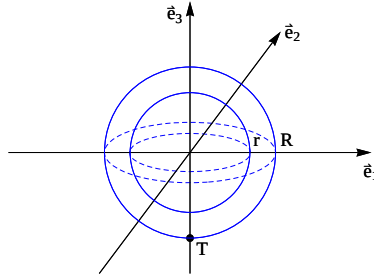
- (10) Dana je homogena krogelna lupina $r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ z maso m .

- Izračunaj vztrajnostni tenzor lupine glede na točko na njenem zunanjem obodu.
- Lupino vpneemo v točki na njenem zunanjem obodu. Okoli katerih osi je možno enakomerno vrtenje lupine brez zunanjih navorov?

Rešitev:

$$(a) \quad J_T = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3} + mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3} + mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3} \end{bmatrix}.$$

- Enakomerna rotacija je možna okoli normale na tangentno ravnino in okoli katerekoli osi, ki leži v tangentni ravnini.

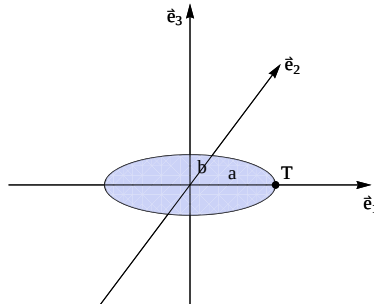


- (11) Homogena plošča v obliki elipse s polosema a in b ter z maso m se vrti okrog večje polosi. Ploščo zavrtimo, tako da ima na začetku kotno hitrost ω_0 .
- Izračunaj vztrajnostni tenzor plošče glede na težišče in glede na teme elipse pri večji polosi.
 - Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe in izračunaj, koliko časa je potrebno, da se kotna hitrost zmanjša na polovico prvotne, če vrtenje zaviramo z navorom, ki je sorazmeren kotni hitrosti (to je $N(\omega) = -k\omega$ za nek $k > 0$).

Rešitev:

$$(a) \quad J_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}, \quad J_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m(5a^2 + b^2) \end{bmatrix},$$

$$(b) \quad T = \frac{\ln 2 mb^2}{4k}.$$

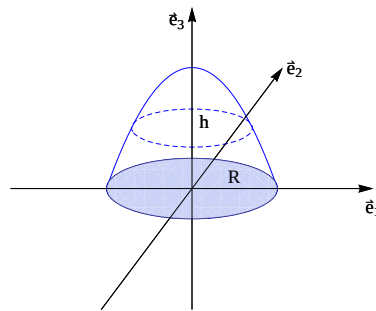


- (12) Homogen paraboloid z maso m in gostoto ρ , ki je omejen s ploskvama $z = 0$ in $z = h \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right)$, kjer je $h = R$, se vrti okrog svoje osi simetrije. Od spodaj je podprt s horizontalno ravnino $z = 0$.
- Izračunaj vztrajnostni tenzor telesa glede na središče osnovne ploskve.
 - V kolikšnem času začetna kotna hitrost pade na polovično vrednost, če je koeficient trenja med podlago in ravno ploskvijo paraboloida enak k ? Tu upoštevaj, da je gostota ploskovne sile konstantna in enaka teži paraboloida deljeno s ploščino osnovne ploskve.

Rešitev:

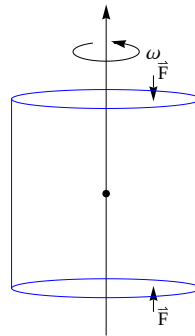
$$(a) \quad J_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}mR^2 \end{bmatrix},$$

$$(b) \quad T = \frac{R\omega_0}{4gk}.$$



- (13) Homogen valj z maso m , polmerom R in višino h zavrtimo okoli simetrijske osi s kotno hitrostjo ω_0 . Valj stisnemo z vodoravnima hrapavima ploščama z nasprotno enakima silama velikosti F , ki sta enakomerno porazdeljeni po stičnih ploskvah. Zapiši Eulerjeve enačbe in izračunaj, čez koliko časa se valj ustavi, če je koeficient trenja med ploščama in valjem enak μ .

Rešitev: $T = \frac{3mR\omega_0}{8\mu F}.$



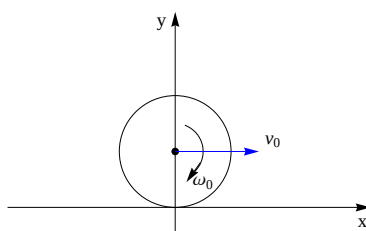
- (14) Homogen disk z maso m in s polmerom R se giblje po premici. Na začetku ima njegovo težišče hitrost v_0 , disk pa se vrti s kotno hitrostjo ω_0 okoli simetrijske osi. Disk nekaj časa drsi, nato pa se začne kotaliti. Koeficient trenja med diskom in podlago je enak k .
- (a) Obravnavaj primer, ko je kotna hitrost večja od kotne hitrosti kotaljenja. Kdaj preide drsenje v kotaljenje?

- (b) Obravnavaj primer, ko je kotna hitrost manjša od kotne hitrosti kotaljenja. Kolikšna mora biti začetna kotna hitrost diska, da se bo odkotalil v nasprotni smeri, kot pa je njegova začetna hitrost?

Rešitev:

$$(a) \quad T = \frac{\omega_0 R - v_0}{3kg},$$

$$(b) \quad \omega_0 < -\frac{2v_0}{R}.$$



- (15) Vodoravna plošča se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a v vodoravni smeri, po njej pa se kotali krogla z maso m in s polmerom R . V začetnem trenutku ima težišče krogle hitrost v_0 relativno na ploščo v smeri pravokotno na gibanje plošče.

- (a) Izračunaj silo kotaljenja.
 (b) Izračunaj trajektorijo težišča krogle v koordinatnem sistemu, ki miruje glede na ploščo.

Rešitev:

$$(a) \quad \vec{F}_{\text{kot}} = -\frac{2}{7}ma \vec{e}_1,$$

$$(b) \quad \vec{r}_*(t) = \left(\frac{5}{14}at^2, v_0t, R \right).$$

