- Cramerovo pravilo za 2x2 sisteme

$$\begin{aligned} ax+by&=c \quad \}e \\ dx+ey&=f \quad \}b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} aex+bey&=ce \\ dbx+eby&=fb \\ \hline (ae-db)x&=ce-fb \end{aligned}$$

$$x=\frac{ce-fb}{ae-db}=\frac{\det\begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}}$$

Kofaktorska matrika za 2x2 matriko

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \check{A}=\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad \tilde{A}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad \widetilde{(A^T)}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Izpeljava $\det I_i(\vec{x}) = x_i$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det I_1(x) = x_1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{x_1}}$$

$$I_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{x_2} & \cancel{0} \\ 0 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

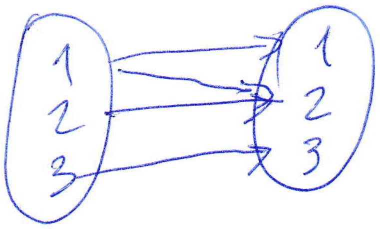
$$\det I_2(\vec{x}) = x_2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{x_2}}$$

$$I_3(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{x_3} \end{bmatrix}$$

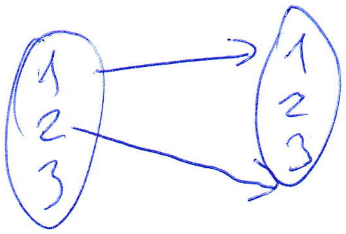
$$\det I_3(\vec{x}) = x_3 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{x_3}}$$

Bijektivne preslikave

$\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$

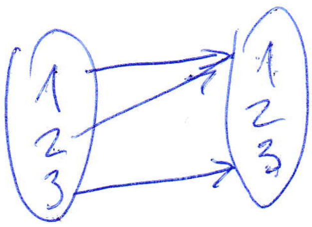


To ni funkcija, ker gresta iz ena ven dve puščici



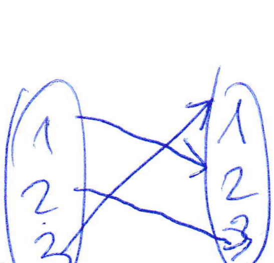
To ni funkcija, ker iz 3 ne gre ven nobena puščica

Pri funkcijah mora iti iz vsakega elementa prve množice ven natanko ena puščica



ni injektivna, ker se dva različna elementa preslikata v isti element

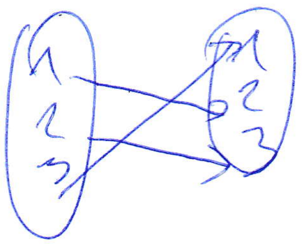
tudi ni surjektivna, ker v 2 ne gre nobena puščica



je injektivna, je surjektivna torej je bijektivna

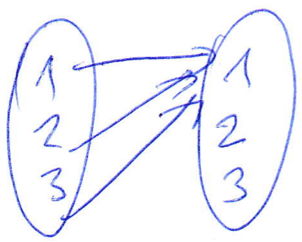
Pri bijektivnih funkcijah gre v vsak element druge množice natanko ena puščica

- Preslikave



lahko označili

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{prva množica} \\ \\ \leftarrow \text{druga množica} \end{array}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ je bijektivna

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ni bijektivna

Koliko je preslikav iz $\mathbb{N}_3$ v $\mathbb{N}_3$?

$$\left.\begin{array}{lll} 1 & \text{gre lahko v} & 1,2,3 \\ 2 & \text{—''—} & 1,2,3 \\ 3 & \text{—''—} & 1,2,3 \end{array}\right\} \text{Torej imamo 27 možnosti}$$

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} a[1,0]+b[0,1] \\ c[1,0]+d[0,1] \end{bmatrix}$$

$$= a\det\begin{bmatrix} [1 & 0] \\ c[1,0]+d[0,1] \end{bmatrix} + b\det\begin{bmatrix} [0 & 1] \\ c[1,0]+d[0,1] \end{bmatrix}$$

$$c\det\begin{bmatrix} [1 & 0] \\ [1 & 0] \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} [1 & 0] \\ [0 & 1] \end{bmatrix} \qquad c\det\begin{bmatrix} [0 & 1] \\ [1 & 0] \end{bmatrix} + d\det\begin{bmatrix} [0 & 1] \\ [0, & 1] \end{bmatrix}$$

$$= ac\,\overbrace{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{0} + ad\,\overbrace{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{1}$$

$$+\, bc\det\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{-1} + bd\,\underbrace{\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{0}$$

$$= ad - bc$$

- A lahko signaturo permutacije izračunamo brez determinant?

Da,

1. korak ~~Vsako~~ Permutacijo zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov
2. korak Vsak cikel zapišemo kot produkt transpozicij

Primer $\sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (143)(25)$

$$1 \to 4 \to 3 \to 1$$

Temu rečemo cikel $(1\ 4\ 3)$

$$2 \to 5 \to 2$$

Temu rečemo cikel (25) (= transpozicija)

Vemo, da je ~~ka~~ $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}[(143)(25)]$

$$= \operatorname{sgn}(143)\, \underbrace{\operatorname{sgn}(25)}_{\substack{\| \\ \det P_{2,5} \\ \| \\ -1}}$$

Če ima cikel dolžino 2, je njegova signatura -1

Cikel $(1\,4\,3)$ lahko zapišemo kot produkt dveh transpozicij

$$(1\,3)(1\,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} = (1, 4) \\ = (1\,3) \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,4\,3)$$

$$(1\,4\,3) = (1\,3)(1\,4)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(1\,4\,3) = \underbrace{\operatorname{sgn}(1\,3)}_{-1} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(1\,4)}_{-1} = \underline{1}$$

Cikel dolžine 3 ima signaturo 1.

3	1
4	-1
5	1