

LINEARNA ALGEBRA 2020/21

8. VAJE: 23. 11. 2020

1. Reši matrično enačbo $AX(I + B) = B + A + I$ za

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Naj bodo $A, A', B, B', C, C', D, D' \in M_n(\mathbb{R})$. Naj bo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ in } \mathcal{A}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}.$$

Izrazi $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ s produkti XY' .

3. Poišči inverze matrik (kdaj obstajajo)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

4. Naj bo $P \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika. Naj bo $A = P^{-1}BP$. Pokaži: A je obrnljiva natanko tedaj, ko je B obrnljiva. Pokaži še $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ in $A^m = P^{-1}B^mP$
5. Matriki A in B komutirata, če je $AB = BA$. Pokaži, da kvadratna matrika A komutira z vsemi ostalimi matrikami iste velikosti natanko tedaj, ko je oblike λI za $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. Izračunaj determinanti matrik

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Kdaj je obrnljiva diagonalna matrika $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$?

$$\text{diag}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & & \\ 0 & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

↓
diagonalna matrika

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \text{ obrnljiva} \Leftrightarrow \det(\text{diag}(a_1, \dots, a_n)) \neq 0$$

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

≠
0
⇔
∀ i $a_i \neq 0$

1. Reši matrično enačbo $AX(I+B) = B+A+I$ za

Sistem

$$CX = D$$

rešujemo z Gaussovo metodo

$$[C|D] \rightsquigarrow [I]$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem $XD = Y$ lahko rešujemo tudi:

kot $\begin{bmatrix} D \\ Y \end{bmatrix}$ in Gaussovo metodo po stolpcih.

Najprej rešimo

$$CXD = E \quad CY = E$$

$$\text{Potem rešujemo } XD = Y \rightsquigarrow (XD)^T = D^T X^T = Y^T$$

$$\text{Poiščemo } X^T \rightarrow X = X^{TT}$$

Če sta C in D obrnljivi

$$X = C^{-1} E D^{-1}$$

$$(I+B)^{-1} = I-B$$

$$AX(I+B) = I+B+A$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$AX = (I+B)(I+B)^{-1} + A(I+B)^{-1}$$

$$AX = I + A(I-B)$$

$E_{12}(-1)$ „Pri stolpcu odštejemo od tretjega.“

$$I + A(I-B) \quad A(I-B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & | & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

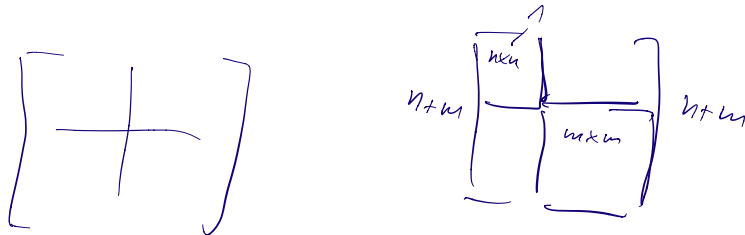
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -2 & -2 \\ 1 & & & | & -1 & 3 & 0 \\ & 1 & & | & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Naj bodo $A, A', B, B', C, C', D, D' \in M_n(\mathbb{R})$. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ in } A' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}.$$

Izrazi AA' s produkti XY' .



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{bmatrix}$$

zmožemo se isto kot že poznamo podrazdeliti

3. Poišči inverze matrik (kraj obstajajo)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & B^{-1} \\ C^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & B^{-1} \\ C^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I_{2n}$$

Inverz $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ obstaja, če obstajata inverza A, D .

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B & | & I & 0 \\ 0 & D & | & 0 & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Predpostavimo, da } A^{-1} \text{ obstaja}} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B & | & A^{-1} & 0 \\ 0 & D & | & 0 & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Predpostavimo, da } D^{-1} \text{ obstaja}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} I & A^{-1}B & A^{-1}0 \\ 0 & I & D^{-1} \end{array} \right] \xrightarrow{A^{-1}B \text{ z leve}} \left[\begin{array}{cc|c} I & 0 & A^{-1} - A^{-1}B D^{-1} \\ 0 & I & 0 \quad D^{-1} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} - A^{-1}B D^{-1} \\ 0 \quad D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A A^{-1} & -A A^{-1}B D^{-1} + B D^{-1} \\ 0 & D D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & B & I & 0 \\ C & 0 & 0 & I \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} C & B & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} I & 0 & B^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 & C^{-1} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A & B & I & 0 \\ C & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

Če znamo računati inverz XY ali YX potem lahko računamo inverz Y z

$$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1} \rightsquigarrow Y^{-1} = (XY)^{-1} \cdot X$$

$$(YX)^{-1} = X^{-1}Y^{-1} \rightsquigarrow Y^{-1} = X(YX)^{-1}$$

$$\overset{Y}{\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}} = \overset{YX}{\begin{bmatrix} B & A \\ 0 & C \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} B & A \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}A C^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\overset{Y^{-1}}{\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}}^{-1} \overset{X}{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}} \overset{(YX)^{-1}}{\begin{bmatrix} B & A \\ 0 & C \end{bmatrix}}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1} - BAC^{-1} & \\ & C^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -BAC^{-1} \end{bmatrix}$$

Alternativno lahko uporabimo Gaussa.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

če je A obrnljiva.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ & I \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ vedno obrnljiva $\downarrow$ obrnljiva če sta A^{-1} in $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ ostaja $\downarrow$ vedno obrnljiva

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} \text{ ostaja}$$

Nekaj podobnega lahko naredimo, če predpostavimo, da je D obrnljiva. Lahko se zgodi, da A in D nista obrnljivi ampak $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ je. npr. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Naj bo $P \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika. Naj bo $A = P^{-1}BP$. Pokaži: A je obrnljiva natanko tedaj, ko je B obrnljiva. Pokaži še $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ in $A^m = P^{-1}B^mP$

$$P, P^{-1} \quad A = P^{-1}BP \quad B = PAP^{-1} \rightarrow \text{konjugiranje s } P \text{ (} P^{-1} \text{)}$$

če A^{-1} obstaja $\leadsto B^{-1} = PA^{-1}P^{-1}$

$$PAP^{-1}PA^{-1}P^{-1} = P \underbrace{AA^{-1}}_I P^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_I = I$$

če obstaja $B^{-1} \leadsto A^{-1} = P^{-1}B^{-1}P$

$$\text{tr}(xy) = \text{tr}(yx)$$

$$\bullet \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = \text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}((PA)P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PA) = \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(xyz) \stackrel{\forall \text{ splošno}}{\neq} \text{tr}(xzy) \quad \text{npr.} \quad \begin{matrix} x & y & z \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{tr}} 1$$

$$\text{tr}(zyx) = \text{tr}(yzx) \quad \begin{matrix} y & z & x \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{tr}} 0$$

Simbole lahko cikelno menjamo in se sled ohranja.

$$A^m = P^{-1} B^m P$$

$$\left| \begin{array}{ccc} X & Y & \xrightarrow{\text{z množenje}} XY \\ \downarrow & \downarrow & \\ PXP & PYP & \xrightarrow{\text{z množenje}} PXP \cdot PYP = P \underbrace{XP \cdot PY} P = PXY P \end{array} \right.$$

$$A^m = P^{-1} B^m P \quad \text{z indukcijo}$$

$$m=1 \quad A = P^{-1} B P$$

$$\text{Naj velja za } m \rightarrow m+1 \quad A^{m+1} = A^m \cdot A = P^{-1} B^m P \underbrace{P^{-1} B P}_{= B} = P^{-1} B^{m+1} P$$

če je A obrnljivo $A^{-1} = P^{-1} B^{-1} P$ velja za vsa cela števila

$$f: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$f: X \longmapsto P^{-1} X P$$

$$P^{-1} X P = f(X)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(XY) = f(X) \cdot f(Y) \\ f(X+Y) = f(X) + f(Y) \end{array} \right\} f \text{ je homomorfizem}$$

5. Matriki A in B komutirata, če je $AB = BA$. Pokaži, da kvadratna matrika A komutira z vsemi ostalimi matrikami iste velikosti natanko tedaj, ko je oblike λI za $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$AB = BA$$

λI komutira z vsemi

$$\underline{\lambda I X = \lambda X = X \lambda = X(\lambda I)}$$

Če je $AB = BA$ za vsako $B \in M_n(\mathbb{R})$, potem je

$$A = \lambda I \quad \text{za nek } \lambda \in \mathbb{R}$$

$AB = BA$
 Izberemo nekaj nam "všečnih" matrik
 za katere bomo enačost preverjali

$$i = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{ji} & a_{ji} & a_{ji} & a_{ji} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$
presednice
 a_{ji}

$e_j A \rightarrow j$ -ta vrstica matrike A v i -ti vrstici
 $A e_j \rightarrow i$ -ti stolpec matrike A v j -tem stolpcu

$$= i = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{ji} & a_{ji} & a_{ji} & a_{ji} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$
 a_{ji}

$\rightarrow$ To velja za vse par i, j .

$$a_{jj} = a_{ii} \quad \forall i, j = 1 \dots n$$

izven presednice $\rightarrow a_{ji} = 0 \quad i \neq j \quad a_{ji} = 0 \quad i \neq j \quad a_{ji} = 0 \quad \forall i, j \neq i$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot I = d \cdot I$$

$a_{11} = d$

6. Izračunaj determinanti matrik

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Razvoj po prvi vrstici.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 7 \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot 0 + 7 \cdot 6 + 0 = 7 \cdot 6 = 42$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = - \det \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$3 \cdot 7 \cdot 2$

Determinanta spodnje (zgornje) trikotne matrike je enak produkt diagonalnih koeficientov.

	operacija	det
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$	- Zamenjamo sosedn. vrstici	$-\det$
	- Zamenjamo sosednj. stolpca	$-\det$
	- i -ti vrstici (stolpcu) odštejemo večkratnik j -te vrstice (stolpca)	$\det$
	- če vrstico (stolpec) pomnožimo z α	$\alpha \cdot \det$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ \boxed{0 \ 0} & -2 & 3 \\ \boxed{0 \ 0} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Razvoj po prvem stolpcu.

$$3 \cdot \det \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot 7 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2)$$

$$-42 + 2 = -40$$

$$\det \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det A \cdot \det B = (3 \cdot 7 - 1) \cdot (-2) = -40$$