

Zaporedje - zadajenje

Spomnimo se Cauchyjeve lastnosti:

Zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je Cauchyjevo, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tako da velja

$$n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Izrek Vsako realno Cauchyjevo zaporedje je konvergentno.

Dokaz: Najprej pokažimo, da je Cauchyjevo zaporedje omejeno.

Res: Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Po def. Ca. zap. obstaja $N_{\frac{\varepsilon}{3}} \in \mathbb{N}$ $\exists$:

$$n, k \geq N_{\frac{\varepsilon}{3}} \Rightarrow |a_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(v def namesto N_ε vzamemo $N_\varepsilon + 1$)

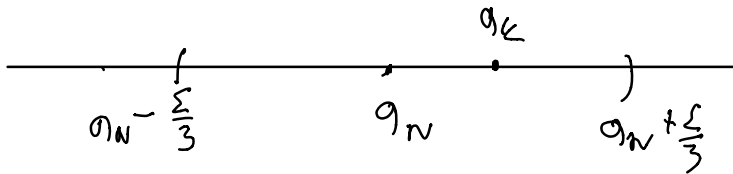
Postavimo $n = N_\varepsilon = N$ Za vsak $k \in \mathbb{N}$

imaemo

$$|a_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ to po trikotniku}$$

zapišemo tako: ker $a_n = a_N$

$$|a_N - a_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$



Torej:

$$a_N - \frac{\varepsilon}{3} < a_k < a_N + \frac{\varepsilon}{3} \quad (*)$$

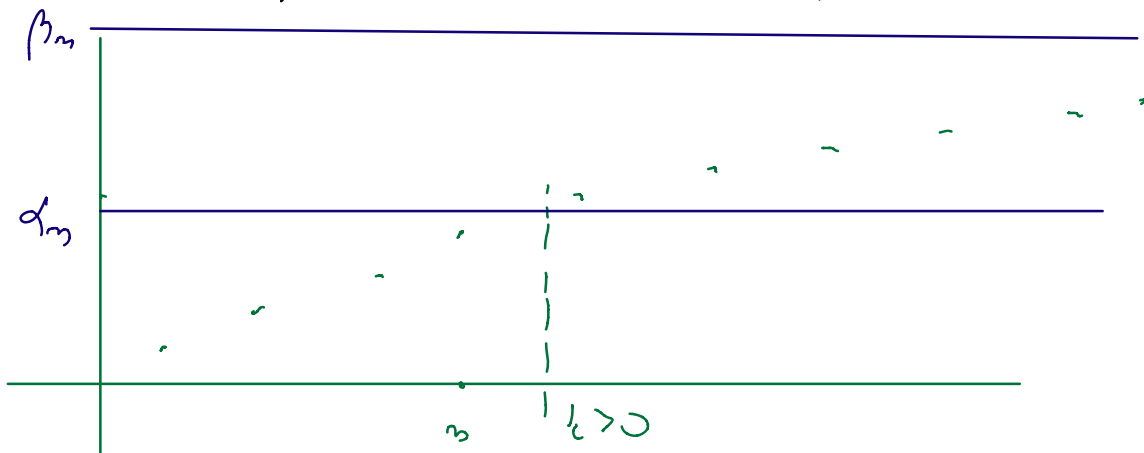
→ to velja za $\forall k \geq N$.

Torej so N -lepe členi zaprej so vsi a_k
v omejeni delici $(a_N - \frac{\varepsilon}{3}, a_N + \frac{\varepsilon}{3})$, kar pomeni
da so le (morda) $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$.

Torej: zapredek je res omejen.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$$\alpha_n := \inf_{k \geq n} a_k \quad \beta_n := \sup_{k \geq n} a_k$$



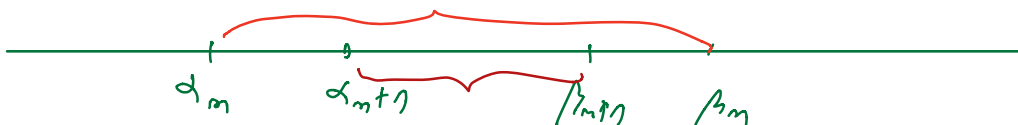
Offensichtlich:

$$\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n$$

Es ist also $[\alpha_n, \beta_n]$ $n \in \mathbb{N}$ eine

Folge:

$$[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subset [\alpha_n, \beta_n]$$



Znači Cauchyjeva lastnost je res kodi:
 $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$:

$$n > N \Rightarrow |a_n - \beta_n| < \varepsilon$$

Res: Znači Cauchyjeva lastnost obstaja
 $N \in \mathbb{N}$: $m, n > N$

$$m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(Lahko vzamemo kar $N = \hat{N}$).

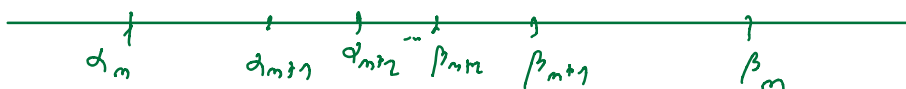
Imamo tudi zaporedje intervalov

$[a_n, b_n]$ $n \in \mathbb{N}$, z lastno lastjo:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

Im $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$

$$n > N \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon$$



iz tega zaporedja intervalov velja
 princip gnezdenih intervalov, ki pravi:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\alpha_n, \beta_n] = A$$

(Prejeto & obravnavo je mogoče eno točko.)

Imamo:

$$\alpha_n \leq A \leq \beta_n \quad n \in \mathbb{N}$$

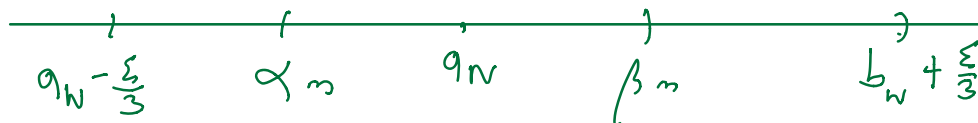
in tudi

$$\alpha_n = \inf_{k \geq n} a_k \leq a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k = \beta_n$$

Iz (*) sledi:

$$a_N - \frac{\varepsilon}{3} \leq \inf_{k \geq n} a_k = \underline{\alpha_n} \leq \underline{\beta_n} = \sup_{k \geq n} a_k < a_N + \frac{\varepsilon}{3}$$

in vsi $n > N$.



Torej: $|\alpha_n - \beta_n| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ (1)

Velj pa tudi:

$$\alpha_n = \inf_{k \geq n} a_k \leq a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k = \beta_n$$

Zato:



$\uparrow$ preobk vseh možnih intervalov;

torej:

$$|A - a_k| < |\alpha_n - \beta_n| \quad (2)$$

Iz (1) in (2) sledi:

$$|A - a_k| < \varepsilon \quad \text{za vsa } k \geq N.$$

Tu pa po definiciji limite zap. pomeni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

□

Opmærksomhed: Principet vedrørende intervaller
er ekvivalent med at sige, at der er reelle
tal mellem enhver Cauchy'sk følge af reelle tal.

Eksempel: Decimale tal.

Der er

$0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$

et reelt tal mellem 0 og 1.

Vis at der er et tal x mellem 0 og 1, som er
Cauchy'sk følge:

Definer en følge af reelle tal $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ således:

$$x_1 = \frac{a_1}{10}$$

$$x_2 = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}$$

$$x_3 = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3}$$

⋮

$$x_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

Sevada $x_n \in \mathbb{N}$ veŕiz:

$$x_n = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

Tadlams: Zupreŕiz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ j *Cauchyjsko*
zupreŕizje.

Res: Nij bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhno
število. Kjerbo kelo naravno število $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$,
da bo veljalo

$$n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Ozlegjmo si izraz $x_m - x_n$
 $m > n$

$$x_m = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_m}{10^m}$$

$$x_m = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_m}{10^m} + \frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{10^{m+2}} + \dots + \frac{a_m}{10^m}$$

Torej:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \left| \frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{10^{m+2}} + \dots + \frac{a_m}{10^m} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{9}{10^{m+1}} + \frac{9}{10^{m+2}} + \dots + \frac{9}{10^m} \right| = \end{aligned} \quad (*)$$

$$= \frac{9}{10^n} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{m-n}} \right)$$

Prepričati se moramo, da
to ni prevelika števila.

Opazimo:

$$S_k = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^k}$$

$$10 S_k = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{k-1}}$$

odštejemo in dobimo:

$$9 S_k = 1 - \frac{1}{10^k}$$

$$S_k = \frac{1 - \frac{1}{10^k}}{9}$$

Hitao vidimo, da razlika između zapretili limita.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{10^k}}{9} = \frac{1}{9} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^k} \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} (1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{10^k} \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{9}$$

Zapretili $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ monotonno raste i ima
ograničenje $\frac{1}{9}$. To je po principu

$$\underline{S_k} \leq \frac{1}{9} \quad \forall k \in \mathbb{N}. (**)$$

Iz (*) i (***) sledi vidimo

$$|x_m - x_n| \leq \frac{9}{10^m} \left(\overbrace{\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{m-n}}}^{S_{m-n}} \right) <$$

$$< \frac{9}{10^m} \cdot \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{1}{10^m}$$

Torej:

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{10^m} \quad (***)$$

Sporočimo se sedaj; Imamo izbrani $\varepsilon > 0$
- izbrani tudi N_ε , da bo

$$n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon \quad (R)$$

Na (***) vidimo: $\exists$ bo N tak, da bo tak,

$$\text{da bo} \quad \frac{1}{10^N} < \varepsilon,$$

potem, bo menčka (R) izpolnjena.

Tak N pa seveda obstaja:

$$10^N > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\otimes)$$

Torej za N_ε lahko vzamemo prvo naravno
število, za katero velja $(\otimes)$.

Dokazati smo taj: zapadje

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je Cauchyjev.

Pa zbog dokazanog izreka pr je to
tako konvergentno. — ima nek limit.

Dokazati smo: Vse rekonstru decimalno
število je tipis nekak realnega števila.

To realno število je limitir zaporedje končnih
približkov naših rekonstru decimalnega števila.