Zaporedja

Uros KUZMAN

Pod izrazom (realno) zaporedja razumemo številne nize elementov oz. preslikavo $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pri kateri označimo $a_n = a(n)$.
DOGOVOR: Člene zaporedja označimo z a_n, zaporedja s takimi členi pa označimo z $\{a_n\}$, (a_n) ali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zaporedja navadno podajamo na dva načina:

- S splošnim členom $a_n = f(n)$.
- Rekurzivno t.j. člen a_n izrazimo s predhodnimi členi in začetnim pogojem.

Za začetek bomo obravnavali naslednji osnovni lastnosti:

- Zaporedje (a_n) je (strogo) naraščajoče, če velja $a_{n+1} \geq a_n$ (oz. strog neenačaj). Če znak obrnemo, dobimo definicijo za zaporedje, ki je (strogo) padajoče. Za zaporedje, ki ima eno ali drugo lastnost pravimo, da je (strogo) monotono.
- Zaporedje (a_n) je omejeno navzgor, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da velja $a_n \leq M$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Podobno povemo, kdaj je zaporedje omejeno navzdol. Če veljata obe lastnosti, pravimo, da je zaporedje omejeno.

Naloga: Pokaži, da je zaporedje, ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

monotono in omejeno.

Oglejmo si prve tri elemente:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},\ a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}.$$

Naša domneva je, da zaporedje strogo narašča in da je navzgor omejeno z 1 (s tem potrdimo, da je tudi omejeno).

Dokažimo najprej naraščanje. Želimo videti, da je

$$\frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+2} > \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

To očitno drži. Sedaj si oglejmo še omejenost navzgor. Vse sumande ocenimo z največjim izmed njih:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Naloga: Pokaži, da je zaporedje

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

strogo naraščajoče in neomejeno.

Monotonost dokažemo na enak način kot prej (napravi to sam oz. sama). Pri neomejenosti pa moramo tokrat iskati oceno navzdol:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Desni izraz gre čez vse meje. Natančneje, za poljuben $M \in \mathbb{R}$ velja, da je $\sqrt{\frac{n}{2}} \geq M$ za $n \geq 2M^2$.

OPOMBA: V tej nalogi ni dovolj pokazati le monotonosti, saj gre razlika med sosednjima členoma proti nič. Posledično bi tako zaporedje lahko bilo tudi omejeno. Na primer, tako kot $1 - \frac{1}{n}$.

Naloga: Pokaži, da je zaporedje

$$a_n = \sqrt[n]{n!}$$

monotono in neomejeno.

Znova si oglejmo tri člene:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{2} \cong 1.4,\ a_3 = \sqrt[3]{6} \cong 1.8.$$

Sumimo, da je zaporedje strogo naraščajoče. Res,

$$\sqrt[n+1]{(n+1)!} > \sqrt[n]{n!} \Longrightarrow ((n+1)!)^n > (n!)^{n+1}.$$

Obe strani neenakosti delimo z $(n!)^n$ in dobimo:

$$(n+1)^n > n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots 1.$$

To očitno drži!

Denimo, da je zaporedje navzgor omejeno. Potem obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $\sqrt[n]{n!} < M$. Brez škode za splošnost je $M \in \mathbb{N}$. Nadalje je pogoj o omejenosti ekvivalenten trditvi, da je $\frac{n!}{M^n} < 1$. Razpišimi to za $n > M$:

$$I_M^n = \left(\frac{1}{M} \cdot \frac{2}{M} \cdot \ldots \cdot \frac{M}{M}\right)\left(\frac{M+1}{M} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{M}\right) < 1.$$

Levi oklepaj zavzame neko fiksno vrednost C_M, desni pa se povečuje z n. Natančneje, izraz lahko navzdol ocenimo z

$$I_M^n \geq C_M \left(\frac{M+1}{M}\right)^n = C_M \left(1 + \frac{1}{M}\right)^n \to \infty.$$

Torej ta izraz ne more biti manjši od 1.

MORALA: $n! > M^n$ za poljuben M in vsak dovolj pozen $n \in \mathbb{N}$ t.j. fakulteta narašča hitreje kot vsak izraz M^n.

Linearno rekurzivno zaporedje stopnje k je podano z zvezo

$$a_{n+1} = b_1 a_n + b_2 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k+1}, \; b_j \in \mathbb{R}.$$

Če ima polinom

$$p(\lambda) = \lambda^k - b_1 \lambda^{k-1} - \ldots + b_0$$

le enostavne realne ničle, je splošni člen zaporedja oblike:

$$a_n = C_1 \lambda_1^n + \ldots + C_k \lambda_k^n,$$

kjer so C_j neznane konstante, ki jih določimo z začetnimi pogoji.

Naloga: Poišči splošni člen za Fibonaccijevo zaporedje:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Poiščimo ničli polinoma:

$$\lambda^2 = \lambda + 1.$$

To sta števili:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Splošni člen ima torej obliko:

$$a_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Določimo še konstanti C in D. Vstavimo $n = 0$ in $n = 1$:

$$a_0 = C + D = 0,$$

$$a_1 = C\frac{1+\sqrt{5}}{2} + D\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Dobimo $C = \frac{1}{\sqrt{5}} = -D$. Splošni člen je torej

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Naloga: Naj bo $p^2 + 4q = 0$.

a) Dokaži, da ima zaporedje $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ splošni člen oblike

$$a_n = (C + Dn)\lambda^n,$$

kjer sta C in D neznani konstanti, λ pa ničla ustrezne kvadratne funkcije.

b) Poišči splošni člen zaporedja

$$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4}a_{n-2}, \; a_0 = a_1 = 1.$$

Vstavimo izraz v našo zvezo:

$$(C + D(n+1))\lambda^{n+1} = p(C + Dn)\lambda^n + q(C + D(n-1))\lambda^{n-1}).$$

To preoblikujemo v izraz

$$(C + D(n-1))(\lambda^2 - p\lambda - q) + D\lambda(2\lambda - p) = 0.$$

Prvi del je očitno ničeln zaradi dejstva, da je λ ničla kvadratne funkcije, drugi del pa je posledica dejstva, da je dvojna. Res, zanjo velja tudi $p'(\lambda) = 2\lambda - p = 0$.

Rešimo še točko b). Imamo

$$\lambda^2 = \lambda - \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

Torej velja

$$a_n = (C + Dn)\frac{1}{2^n}.$$

Vstavimo $n = 0$ in $n = 1$:

$$a_0 = C = 1,\ a_1 = \frac{C + D}{2} = 1.$$

Dobimo $C = D = 1$.

OPOMBA: Na podoben način lahko poiščemo tudi splošni člen linearne rekurzije višje stopnje, v kateri se pojavijo večkratne ničle. Res, za ničlo stopnje s v nastavek dodamo

$$\ldots + C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n + \ldots + C_s n^{s-1}\lambda^n + \ldots.$$