

HODNIK DIMENZIJE $n \times 1$ ŽELIMO POKRITI
S PLOŠČAMI 3 BARV, PRI ČEMER SO 4
DIMENZIJE 1×1 , 5 PA 2×1 . NA
KOLIKO NAČINOV LAHKO TO STORIMO?



4x

5x

NAMIG: POIŠČI USTREZNO REKURZIJO.

KAKŠNI SO ZAČETNI POGOJI OZ. ŠTEVILO
MOŽNOSTI ZA $n=1$ IN $n=2$.



$$a_1 = 4$$



$$a_2 = 21$$

KAKO LAHKO ŠTEVILO MOŽNOSTI a_n
IZRAZIMO S PRETEKLIMI ČLENI?

PRIMER $n=3$:



$$4^3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 =$$

$$4(16 + 5) + 5 \cdot 4 = 4 \cdot a_2 + 5a_1$$

SPLOŠEN n:

m

m

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

OSTANE NAM ŠE MATEMATIČNI DEL:

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

$$1^2 = 4 \cdot 1 + 5$$

$$1^2 - 4 \cdot 1 - 5 = 0$$

$$(1-5)(1+1)=0$$

$$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -1$$

$$a_n = C \cdot 5^n + D \cdot (-1)^n$$

$$a_1 = 5C - D = 4$$

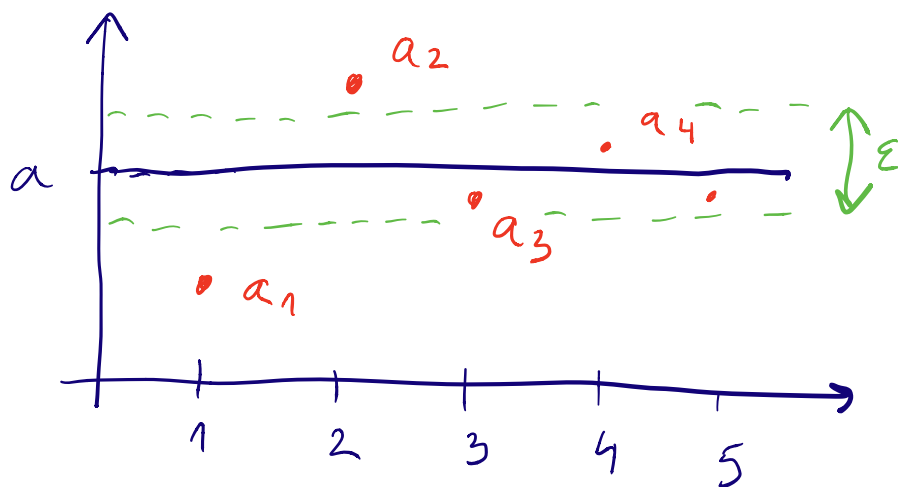
$$a_2 = 25C + D = 21$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{5}{6} \\ D &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{6} \left(5^{n+1} + (-1)^n \right)$$

DEF:

ŠTEVILO $a \in \mathbb{R}$ JE LIMITA REALNEGA ZAPOREDJA, ČE ZA $\forall \varepsilon > 0$ OBSTAJA $n_0 \in \mathbb{N}$, DA ZA $n \geq n_0$ VELJA $|a_n - a| < \varepsilon$



OD NEKEGA n_0 DALJE SO VSI ČLENI (a_n) ε -BLIZU a .

OPOMBA: n_0 JE ODVISEN OD ε .

NALOGA: PO DEFINICIJI DOKAŽI, DA JE 3 LIMITA ZAPOREDJA:

$$a_n = \frac{6n - 5 \cos \frac{n\pi}{2}}{2n - 1}.$$

IZBERIMO POLJUBEN $\varepsilon > 0$. ISČEMO TAK $n_0 \in \mathbb{N}$ (ODVISEN OD ε), DA BO

$$|a_n - 3| < \varepsilon$$

RAZPISIMO LEVO STRAN:

$$\left| \frac{6n - 5 \cos \frac{n\pi}{2}}{2n-1} - 3 \right| = \left| \frac{6n - 5 \cos \frac{n\pi}{2} - 6n + 3}{2n-1} \right|$$
$$= \left| \frac{3 - 5 \cos \frac{n\pi}{2}}{2n-1} \right| \leq \frac{8}{2n-1}$$

POISKALI SMO ZGORNJO MEJO ZA $|a_n - 3|$.
ČE BO LE TA POD ε , BO TUDI
ZELENA ZVEŽA DRŽALA:

$$\frac{8}{2n-1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{8+\varepsilon}{2\varepsilon} < n$$

SKLEP: ZA NO LAHKO IZBEREMO KATEROKOLI
NARAVNO ŠTEVILO, KI JE VEČJE OD $\frac{8+\varepsilon}{2\varepsilon}$.

V PRAKSI LIMIT NE RAČUNAMO NA TAK
NAČIN, AMPAK Z UPORABO "PRAVIL". ČE
OBSTAJAJO SPODNJE LIMITE, ZANJE VELJAJO ZVEŽE:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} 1 a_n = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ } \bar{c} \in \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n), \text{ } \bar{c} \in f \text{ ZVEZNA.}$$

PRIMER UPORABE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - 1} \begin{matrix} /: n^2 \\ /: n^2 \end{matrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} =$$

LIMITE ENAJE 0.

$$= \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{1 - 0} = \underline{\underline{1}}$$

PRAVILO

(2) IN (4)

NALOGA: IZRAČUNAJ LIMITE

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n - 3}{7n - 3n^3 + 2}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{n^2 + 1} - n^2$$

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n - 3}{7n - 3n^3 + 2} \stackrel{/: n^3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\frac{7}{n^2} - 3 + \frac{2}{n^3}} \stackrel{0}{=} \frac{2 + 0 - 0}{0 - 3 + 0} = -\frac{2}{3}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \approx \infty - \infty$$

ZA IZRAZ " $\infty - \infty$ " PRAVIMO, DA JE NEDEFINIRAN, SAJ PRI RAZLIČNEM IZBORU ZAPOREDIJ DA RAZLIČNE VREDNOSTI. NA PRIMER:

$$(n^2 + n) - n^2 \rightarrow \infty$$

$$n^2 - (n^2 + n) \rightarrow -\infty$$

$$(n^2 + 1) - n^2 \rightarrow 1$$

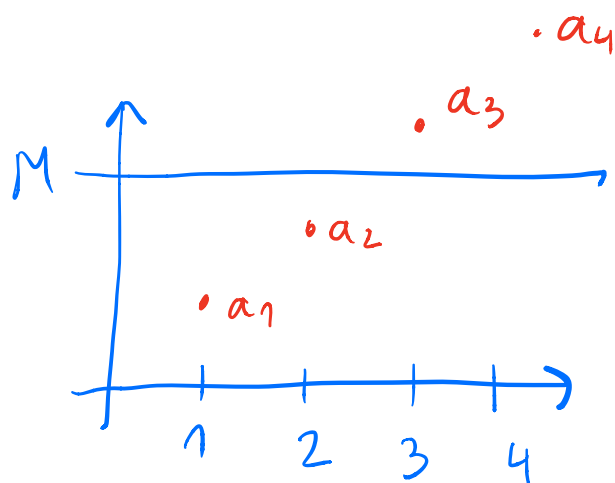
OPOMBA: ČE JE VMES + TEH TEŽAVNI. TAKRAT VELJA " $\infty + \infty = \infty$."

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \sqrt{n^2+1} - n^2) &= \frac{n^2 \sqrt{n^2+1} + n^2}{n^2 \sqrt{n^2+1} + n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 (n^2+1) - n^4}{n^2 \sqrt{n^2+1} + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{n^2 \sqrt{n^2+1} + n^2} \quad \begin{matrix} / : n^3 \\ / : n^3 \end{matrix} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \infty \end{aligned}$$

KAJ POMENI, DA JE $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$?

ZA $\forall M \in \mathbb{R}$ OBSTAJA $n_0 \in \mathbb{N}$, DA ZA $n \geq n_0$ VELJA $a_n > M$.



OD NEKJE DAJE
SO ČLENI VEČJI
OD M .

OPOMBA: PODOBNO SE DEFINIRA $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

POMEMBNO VPRAŠANJE:

KATERI IZ MED IZRAZOV JE BOLJ SPLOŠEN?

(i) LIMITA (a_n) NE OBSTAJA.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$.

ODGOVOR: (ii) JE POSEBEEN PRIMER
(i) oz. (i) JE BOLJ SPLOŠEN.

t.j. IMAMO TUDI ZAPOREDJA, KJER LIMITA
NE OBSTAJA, PA NE GREDO PROTI $\pm \infty$.

NPR. $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

NALOGA: VEMO, DA JE $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 \pm \frac{1}{n})^n = e^{\pm 1}$

IZRAČUNAJ LIMITE:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{2n+3}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} n (\log_2 (2n-1) - \log_2 n - 1)$$

(a) LIMITO MORAMO PREOBLIKOVATI NA ZNANI TIP.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1 \cdot \frac{1}{n+1} \cdot n} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m} \right)^m \cdot \frac{n}{n+1}$$

$\uparrow$ $m = n+1$ $\uparrow$ PRAVILO (5)

$$= e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = e^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot 2n+3} \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n}} = e^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n (\log_2 (2n-1) - \log_2 n - 1) &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log_2 \frac{2n-1}{2 \cdot n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^n \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \uparrow \text{PRAVILO (5)} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \log_2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^n \right) = \\
 &= \log_2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n \cdot \frac{1}{2n} \cdot n} \right) = \\
 &= \log_2 e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 e
 \end{aligned}$$