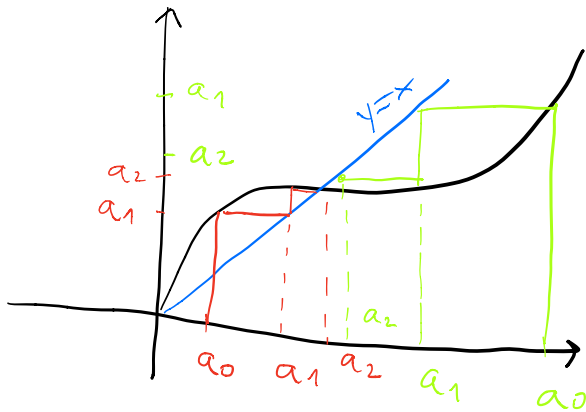


NELINEARNE ENOKORAKNE REKURZIJE

POSVETILI SE BOMO ZAPOREDJEM OBLIKE:

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

TOVRSTNE REKURZIJE SO ZANIMIVE, KER JIH LAHKO OPAZUJEMO S t.-i. 'GRAFIČNO METODO'.



ZAČNEMO PRI a_0 NA ABSCISI, TER Gremo NAVPIČNO DO GRAFA $y=f(x)$. NATO Gremo VODRAVNO DO SIMETRALE $y=x$. POSTOPEK PONAVLJAMO. PROJEKCIJE PRESEČIŠČ $y=f(x)$ NA OSI x ILUSTRIRAJO VEDENJE (a_n) .

POZOR: GRAFIČNA METODA NI DOKAZ. SVOJE SKLEPE JE TREBA VEDNO UTEME LJITI. PRI TEM STA KORISTNI DVE DEJSTVI:

(1) ČE JE f ZVEZNA, VELJA:

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & f(a_n) \\ \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ a & = & f(a) \end{array}$$

EDINE MOŽNE LIMITE SO PRESEČIŠČA $y=f(x)$ IN $y=x$.

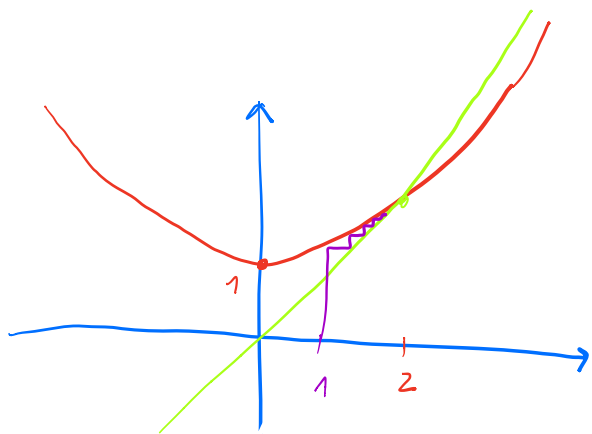
(2) IZREK:

MONOTONO OMEJENO ZAPOREDJE JE VEDNO KONVERGENTNO (t.-i. MA LIMITO)

NALOGA: PODANO JE ZAPOREDJE

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4}, \quad a_1 = 1.$$

DOKAŽI, DA JE KONVERGENTNO IN DOLOČI NJEGOVO LIMITO.
OBRAVNAVA) KONVERGENCO TUDI ZA DRUGAČNE $a_1 \in \mathbb{R}$.



$$1 + \frac{x^2}{4} = x \quad | \cdot 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 2$$

SUMIRMO: ZAPOREDJE MONOTONO NARAŠČA, NJEGOVA
LIMITA PA JE ENAKA $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

DOKAZ V DVEH KORAKIH:

#1: IMA LIMITO, KER JE NAUŽGOR OMEJENO
Z 2 IN NARAŠČAJOČE.

#2: EDINI KANDIDAT ZA LIMITO JE $a = 2$.

V RESNICI MORAMO DOKAZATI LE #1:

$$\underline{a_n < 2}$$

INDUKCIJA: $a_1 = 1 < 2$

$n \rightarrow n+1$: $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4} \stackrel{\text{i.p.}}{<} 1 + \frac{2^2}{4} = 2 \quad \checkmark$

$$\underline{a_{n+1} > a_n}$$

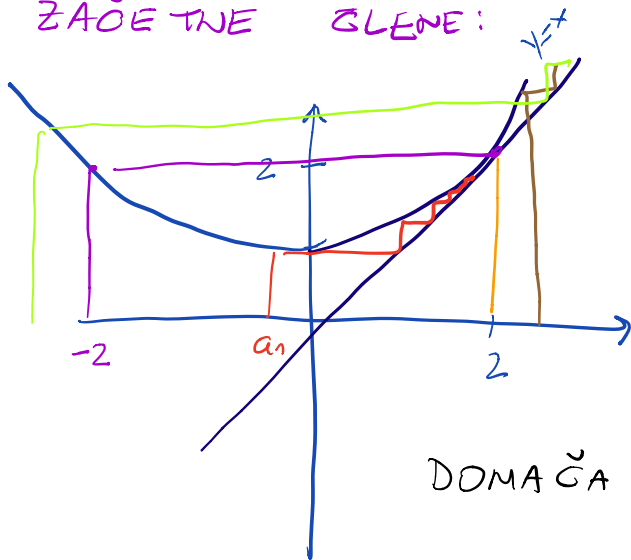
$$1 + \frac{a_n^2}{4} > a_n \quad | \cdot 4$$

$$a_n^2 - 4a_n + 4 > 0$$

$$(a_n - 2)^2 > 0$$

TO JE RES, KER $a_n \neq 2$
OZ. $a_n < 2$.

SEDAJ SI OGLEDJMO ŠE OBNAŠANJE ZA DRUGAČNE
ZAČETNE VREDNOSTI:



$$y=f(x)$$

DOMNEVE:

~ $a_1 = 2$ IMAMO KONSTANTNO ZAPOREDJE $a_n = 2$.

~ $a_1 = -2$, PODOBNO $a_n = 2$, ZA $n \geq 2$.

~ $a_1 \in (-2, 2)$ ZAPOREDJE NARAŠČA K 2 .

~ $a_1 \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ ZAPOREDJE DIVERGIRA OZ. GRE K ∞ .

DOMAČA NALOŽA: DOKAŽI!

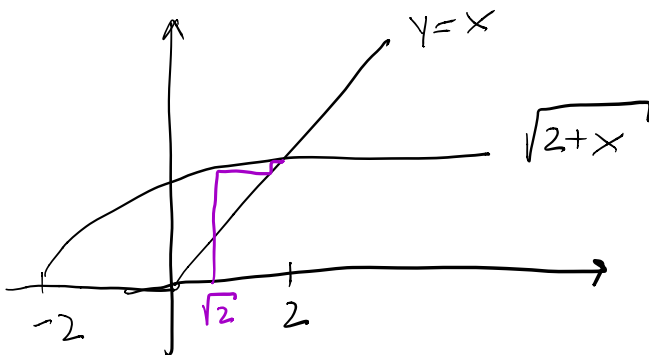
NALOŽA: POIŠČI LIMITI ZAPOREDIJ:

$$(a) \quad a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}}_{n \text{ KORENOV}}$$

$$(b) \quad b_n = \underbrace{\sin(\sin(\dots(\sin(1))\dots))}_{n \text{ SINUSOV}}$$

NAMIG: POIŠČI USTREZNO REKURZIJO.

$$(a) \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2}$$



$$x = \sqrt{2+x}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$\boxed{x=2} \quad x=-1 //$$

DOKAŽIMO, DA ZAPOREDJE MONOTONO NARAŠČA K 2 ,
POTEM JE PO IZREKU TO LIMITA.

$$\underline{\underline{a_n < 2}}$$

$$a_1 = \sqrt{2} < 2 \quad \checkmark \quad \text{i.p.}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{4} = 2$$

$$\underline{\underline{a_{n+1} > a_n}}$$

$$\sqrt{2+a_n} > a_n \quad |^2 \quad (\text{LAHKO, KER } a_n > 0 \text{ IN } a_{n+1} > 0)$$

$$0 > a_n^2 - a_n - 2$$

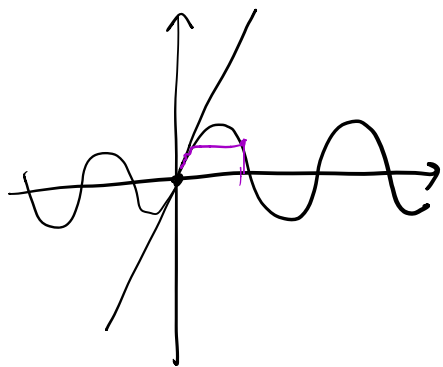
$$0 > (a_n - 2)(a_n + 1)$$

TO DRŽI, KER $a_n \in [0, 2)$.

(ZARADI KORENA SO VSI ČLENI POZITIVNI).

SKLEP: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

$$(b) \quad b_{n+1} = \sin(b_n), \quad b_0 = 1$$



DEJSTVO: $\sin x = x \Rightarrow x = 0$,

SAJ JE $y = x$ TANGENTA NA

$y = \sin x$ V TOČKI $x = 0$.

$$\text{RES: } (\sin x)' \Big|_{x=0} = \cos x \Big|_{x=0} = 1.$$

DOMNEVA: ZAPOREDOJE MONOTONO PADA K 0.

TOKRAT NAJPREJ DOKAŽIMO, DA PADA:

$$\underline{\underline{b_{n+1} < b_n}}$$

$$\sin(b_n) < b_n \quad \text{ZA VSE } b_n > 0$$

(TO VIDIMO IZ ŽGORNJE SLIKE).

$$\underline{\underline{b_n > 0}}$$

$$b_0 = 1 > 0$$

$$b_{n+1} = \sin(b_n) > 0, \quad \text{KER } b_n \in (0, \pi).$$

SKLEP: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

IZREK O SEDIŠCU:

NAJ VELJA:

$$(i) \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad n \geq n_0.$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \in \mathbb{R}.$$

POTEM JE TUDI $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$

SCHEMATIČNO:

$$\left. \begin{array}{ccc} a_n & \leq & b_n \leq c_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & a \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

NALOGA: POIŠČI LIMITO ZA

(a) $a_n = \frac{1000^n}{n!}$

(b) $a_n = \frac{n^2}{(1.1)^n}$

(c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

(a) SPOMNIMO: NA ZAČETKU POGLAVJA SMO DOKAZALI, DA
ZA $\varepsilon > 0$ OBSTAJA $n_0 \in \mathbb{N}$, DA JE $n! > 2^n$, $n \geq n_0$.

DOMNEVA: NAŠE ZAPOREDJE OD NEKJE DALJE PADA K 0.

DOKAZ: $0 < \frac{1000^n}{n!} < \frac{1000^n}{2000^n}$, KER $n! > 2000^n$
ZA $n \geq n_0$.

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

0

$$\parallel$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

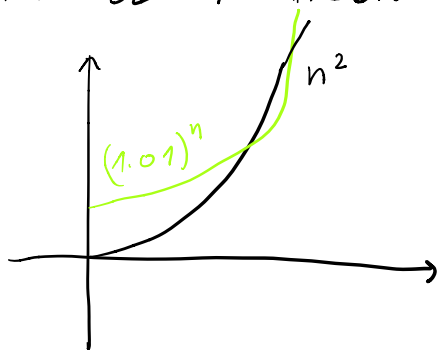
$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

0

SKLEP: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

$$(b) \quad a_1 = \frac{1}{1.1} < 1, \quad a_2 = \frac{4}{1.1} > 3, \quad a_3 = \frac{9}{(1.1)^3} > 4 \dots$$

IZGLEDA KOT DA JE ZAPOREDJE NARAŠČAJOČE,
A V RESNICI NI, SAJ EKSPONENT OD NEKJE
DALJE HITREJE NARAŠČA:



DOKAZ: $a_{n+1} < a_n$ ZA VELIKE n

$$\frac{(n+1)^2}{(1.1)^{n+1}} < \frac{n^2}{(1.1)^n}$$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} < 1.1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1.1$$

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt{1 + \frac{1}{10}}$$

TO JE RES ZA VELIKE $n \gg 1$.

KONKRETNO, PRI $n > 21$.

PODOBNO: NAJDEMO n_0 , DA $n^2 < (1.05)^n$, $n \geq n_0$.

$$0 < \frac{n^2}{(1.1)^n} < \left(\frac{1.05}{1.1}\right)^n$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$0$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$0$$

SKLEP: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(c)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

NAPRAVIMO OCENO Z NAJVEČJIM OZ. NAJMANJŠIM
ČLEKOM V VSOTI:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

1

$\downarrow n \rightarrow \infty$

1

SKLEP: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

OPOMBA:

PRI TEM PRIMERU LEPO VIDIHO, DA JE KLJUČNA
DOBRA IZBIRA OCENE. SE BI VZELI KA PRIMER

$$0 < a_n < 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$
0

$\downarrow n \rightarrow \infty$
 ∞

IZREKA O SANDVIČU NE MOREMO UPORABITI.