

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina 11. predavanja

V tem predavanju obravnavamo linearne diferencialne enačbe višjega reda:

$$Lx := a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = b(t),$$

kjer je $n > 1$ in so koeficienti $a_j(t)$ in desna stran $b(t)$ zvezne funkcije na nekem intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Tak operator

$$L : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}(I), \quad x \mapsto Lx$$

se imenuje **linearni diferencialni operator n -tega reda**.

Če so funkcije $a_j(t)$ in $b(t)$ razreda $\mathcal{C}^r(I)$, potem L definira preslikavo

$$L : \mathcal{C}^{r+n}(I) \rightarrow \mathcal{C}^r(I), \quad x \mapsto Lx.$$

V primeru $b \equiv 0$ je $Lx = 0$ **homogena linearna diferencialna enačba n -tega reda**.

Posebna pozornost bo namenjena primeru, ko so koeficienti a_j konstante.

Regularne točke, motivacija

Točka $t \in I$, v kateri je vodilni koeficient $a_0(t) = 0$ enak nič, se imenuje **singularna točka operatorja**. Obravnava v okolici take točke je praviloma zahtevnejša. Primera sta npr.

$$\begin{array}{ll} t^2 \ddot{x} + a_1 t \dot{x} + a_0 x &= 0 \quad \text{Eulerjeva enačba} \\ t^2 \ddot{x} + t \dot{x} + (t^2 - \nu^2)x &= 0 \quad \text{Besselova enačba} \end{array}$$

Obravnavali bomo predvsem regularne operatorje, pri katerih je $a_0(t) \neq 0$ za vse $t \in I$. Po deljenju z $a_0(t)$ imamo torej operator oblike

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x.$$

Še posebej pomembne so enačbe drugega reda, ki se naravno pojavijo pri obravnavi fizikalnih parcialnih diferencialnih enačb 2. reda.

Na primer, **valovna enačba** sprašuje po funkcijah $u(t, x)$, ki zadoščajo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (\text{ali } u_{tt} = c^2 \Delta u, \text{ če je } x \in \mathbb{R}^n).$$

Taka funkcija $u(t, x)$ opisuje odmik delca v prostoru (spremenljivka x) od začetne lege v odvisnosti od časa t , pri čemer konstanta $c > 0$ predstavlja hitrost potovanja valov skozi prostor.

Motivacija

Najpreprostejše rešitve valovne enačbe iščemo v obliki produkta

$$u(t, x) = T(t)X(x).$$

Če vstavimo v enačbo $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, dobimo

$$\ddot{T}(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \iff \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Sklep je, da morata biti oba izraza na desni strani konstantna. Če to skupno konstanto označimo z $-\lambda$, dobimo dve navadni diferencialni enačbi drugega reda za X in T :

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad \ddot{T}(t) + c^2 \lambda T(t) = 0.$$

S tem dobimo t.i. **stacionarne** ali **razcepne** rešitve valovne enačbe. Izkaže se, da lahko splošno rešitev poiščemo kot linearno kombinacijo (superpozicijo) razcepnih rešitev. V splošnem je potrebno neskončno členov, torej vrsta. To si bomo ogledali v naslednjem predavanju.

Podobno se da reševati vrsto drugih enačb matematične fizike, ki se obravnavajo pri predmetu Analiza 4.

Prevedba na sistem linearnih enačb prvega reda

Z uvedbo spremenljivk

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \ddot{x}, \quad \dots, \quad x_n = x^{(n-1)}$$

prevedemo enačbo $Lx = b$ na sistem n linearnih diferencialnih enačb 1. reda

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dot{x}_n = -(a_n(t)x_1 + a_{n-1}(t)x_2 + \dots + a_1(t)x_n) + b(t)$$

z matriko

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

in nehomogenim členom $\mathbf{B}(t) = (0, 0, \dots, 0, b(t))^T$. Opazimo, da je

$$\text{sled } A(t) = -a_1(t).$$

Eksistenčni izrek za linearno enačbo višjega reda

Iz eksistenčnega izreka za sisteme linearnih enačb prvega reda sledi:

Izrek

Naj bo L regularen linearen diferencialni operator n -tega reda na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Vsak začetni problem

$$Lx = b(t), \quad x(t_0) = c_0, \dot{x}(t_0) = c_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

s $t_0 \in I$ in $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ ima natanko eno rešitev $x(t)$ na intervalu $t \in I$.

Ker je L linearen operator:

$$L(x + y) = L(x) + L(y), \quad L(cx) = cL(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

je množica rešitev homogene enačbe $Lx = 0$ (torej jedro $\ker L$ operatorja L) vektorski podprostor prostora $\mathcal{C}^n(I)$. Ker imamo v eksistenčnem izreku na voljo n prostih konstant $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$, je

$$\dim \ker L = n.$$

Fundamentalna rešitev in determinanta Wronskega

Naj bo $x_1(t), \dots, x_n(t)$ poljubna baza tega prostora. Potem je vsaka rešitev enačbe $Lx = 0$ oblike

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x_j(t)$$

za neke konstante $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Prirejena **fundamentalna rešitev** je

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_n \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \cdots & \ddot{x}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

Ker je sled $A(t) = -a_1(t)$, **determinanta Wronskega** $W(t) = \det \Phi(t)$ zadošča **Liouvilleovi enačbi**

$$\dot{W}(t) = -a_1(t)W(t), \quad W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds}.$$

Torej je $W(t) \neq 0$ za vse $t \in I$, čim je $W(t_0) \neq 0$ za nek $t_0 \in I$. Slednje dosežemo s primerno izbiro začetnih pogojev pri $t = t_0$.

Rešitev nehomogene enačbe

Če poznamo fundamentalno rešitev $\Phi(t)$ homogene enačbe

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = 0,$$

lahko rešimo tudi prirejeno nehomogeno enačbo

$$Lx = b(t)$$

za poljubno zvezno funkcijo $b(t)$. Sledeč metodi, opisani pri reševanju sistemov enačb, je partikularna rešitev nehomogenega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)$$

enaka

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}\mathbf{B}(s)ds.$$

Dejansko, njen odvod po t je enak

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{\Phi}(t)\Phi(s)^{-1}\mathbf{B}(s)ds + \Phi(t)\Phi(t)^{-1}\mathbf{B}(t) &= \int_{t_0}^t A(t)\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\mathbf{B}(s)ds + \mathbf{B}(t) \\ &= A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t). \end{aligned}$$

Rešitev nehomogene enačbe

V našem primeru je

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T,$$

zato je partikularna rešitev $x(t)$ nehomogene enačbe $Lx = b$ enaka prvi komponenti vektorske funkcije

$$\int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}\mathbf{B}(s)ds.$$

(Naslednje komponente so njeni odvodi.) Iz $\mathbf{B}(s) = (0, 0, \dots, b(s))^T$ sledi, da je prva komponenta zgornjega integrala enaka

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \Phi_{1,i}(t)\Phi_{i,n}^{-1}(s)b(s)ds \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(t) \int_{t_0}^t \Phi_{i,n}^{-1}(s)b(s)ds, \end{aligned}$$

kjer so $x_1(t), \dots, x_n(t)$ bazne rešitve homogene enačbe $Lx = 0$ (prva vrstica fundamentalne matrike $\Phi(t)$).

Homogene enačbe s konstantnimi koeficienti

Oglejmo si sedaj homogeno enačbo $Lx = 0$, kjer je

$$Lx = x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{x} + a_nx$$

linearni diferencialni operator reda n s konstantnimi koeficienti.

Rešitve iščemo z nastavkom $x(t) = e^{\lambda t}$. Očitno je

$$L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n) = e^{\lambda t}P(\lambda).$$

Polinom $P(\lambda)$ se imenuje **karakteristični polinom** operatorja L . Če uvedemo oznako $D = \partial/\partial t$ in $D^k = \partial^k/\partial t^k$, lahko operator L zapišemo v obliki

$$L = P(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n.$$

Iz zgornje formule vidimo:

Funkcija $x(t) = e^{\lambda t}$ je rešitev homogene enačbe $Lx = 0$ natanko tedaj, ko je λ ničla karakterističnega polinoma P .

Ničle karakterističnega polinoma P se imenujejo **lastne vrednosti operatorja L** in sestavljajo njegov **spekter**

$$\text{spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Analiza možnih primerov

Primer 1: karakteristični polinom P ima različne realne ničle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Funkcije

$$x_j(t) = e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, n$$

sestavljajo fundamentalni sistem rešitev, to je bazo prostora rešitev enačbe $Lx = 0$. Vsaka rešitev je oblike

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Primer 2: P ima različne ničle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ki so lahko kompleksne.

Če je $\lambda = a + ib$ kompleksna ničla, je tudi $\bar{\lambda} = a - ib$ ničla. Prirejena kompleksna rešitev

$$x(t) = e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))$$

določa par realnih rešitev

$$\Re x(t) = e^{at} \cos(bt), \quad \Im x(t) = e^{at} \sin(bt).$$

Na ta način dobimo fundamentalni sistem rešitev, ki ga določajo funkcije $e^{\lambda_j t}$ za realne ničle polinoma P ter funkcije zgornje oblike za kompleksne ničle.

Primer 3: večkratna lastna vrednost

Primer 3: Število λ je k -kratna ničla polinoma P . To pomeni, da $L = P(D)$ vsebuje faktor $(D - \lambda)^k$. Rešitve iščemo z nastavkom

$$x(t) = e^{\lambda t} q(t).$$

Ker je

$$(D - \lambda)(e^{\lambda t} q(t)) = \lambda e^{\lambda t} q(t) + e^{\lambda t} \dot{q}(t) - \lambda e^{\lambda t} q(t) = e^{\lambda t} \dot{q}(t),$$

sledi z indukcijo

$$(D - \lambda)^k (e^{\lambda t} q(t)) = e^{\lambda t} q^{(k)}(t).$$

Odtod vidimo, da je funkcija $x(t) = e^{\lambda t} q(t)$ rešitev enačbe $Lx = 0$, če je $q(t)$ polinom stopnje $< k$. Tako dobimo k linearno neodvisnih rešitev, ki pripadajo lastni vrednosti λ stopnje k karakterističnega polinoma:

$$x_1(t) = e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = te^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x_k(t) = t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

Če je $\lambda = a + ib$ kompleksna lastna vrednost večkratnosti k , je taka tudi $\bar{\lambda} = a - ib$. Zgornje kompleksne rešitve lahko nadomestimo z $2k$ realnimi:

$$u_j(t) = t^{j-1} e^{at} \cos(bt), \quad v_j(t) = t^{j-1} e^{at} \sin(bt), \quad j = 1, \dots, k.$$

Nekaj primerov

Primer 1:

$$\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 0.$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3), \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Bazni rešitvi sta

$$x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = e^{-3t}.$$

Splošna rešitev je $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

Primer 2:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = 0.$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3, \quad \lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 - i\sqrt{2}.$$

Kompleksna rešitev je

$$z(t) = e^{(1+i\sqrt{2})t} = e^t (\cos(\sqrt{2}t) + i \sin(\sqrt{2}t)).$$

Bazni realni rešitvi sta

$$x_1(t) = e^t \cos(\sqrt{2}t), \quad x_2(t) = e^t \sin(\sqrt{2}t).$$

Nekaj primerov

Primer 3:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 4x = 0.$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Bazni rešitvi sta

$$x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = te^{2t}.$$

Splošna rešitev je

$$x(t) = e^{2t}(c_0 + c_1 t), \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Primer 4:

$$x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = 0.$$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i.$$

Bazne rešitve:

$$\cos t, \quad \sin t, \quad t \cos t, \quad t \sin t.$$

Reševanje nehomogene enačbe $Lx = f$

Oglejmo si sedaj nehomogeno enačbo

$$Lx = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = f(t).$$

V splošnem lahko rešitev najdemo sledeč formuli, ki smo si jo že ogledali.

Sedaj si oglejmo direktno metodo, ki nam da rešitve za linearne kombinacije funkcij oblike $t^k e^{\lambda t}$. Označimo s P karakteristični polinom:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Najprej se spomnimo, da je

$$L = P(D), \quad \text{kjer je } D = d/dt.$$

Za vsak $k \in \mathbb{N}$ označimo s $P^{(k)}(\lambda)$ k -ti odvod polinoma P po λ . Potem je

$$L^{(k)} := P^{(k)}(D)$$

diferencialni operator reda $n - k$ in ničelni operator za $k > n$.

Delovanje operatorja D^k na produkt $tq(t)$

Trditev

Če je $q(t)$ k -krat odvedljiva funkcija na $I \subset \mathbb{R}$, velja formula

$$D^k(tq(t)) = (tq(t))^{(k)} = tq^{(k)} + kq^{(k-1)} = tD^k(q) + kD^{k-1}(q).$$

Dokaz Uporabimo indukcijo. Trditev je trivialna za $k = 0$, pri čemer vzamemo $D^k = 0$ za $k < 0$. Denimo, da enačba velja za nek k . Tedaj

$$\begin{aligned} D^{k+1}(tq) = D(D^k(tq)) &= D(tD^k(q) + kD^{k-1}(q)) \\ &= tD^{k+1}(q) + D^k(q) + kD^k(q) \\ &= tD^{k+1}(q) + (k+1)D^k(q). \end{aligned}$$

Torej formula velja tudi za $k+1$ in trditev je dokazana.

Opomba: Formulo lahko zapišemo tudi v obliki

$$D^k(tq) = tD^k(q) + (D^k)'(q).$$

Delovanje operatorja L na produkt $tq(t)$

Dobljeno formulo posložimo za poljuben linearen operator L s konstantnimi koeficienti. Spomnimo, da je $L = P(D)$ in $L' = P'(D)$.

Trditev

Če je $q(t)$ n -krat odvedljiva funkcija na $I \subset \mathbb{R}$ in je $L = P(D)$ linearen diferencialni operator reda n s konstantnimi koeficienti, velja formula

$$L(tq(t)) = tL(q) + L'(q).$$

Dokaz Naj bo $L = \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} L(tq) &= \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j}(tq) \\ &= \sum_{j=0}^n a_j t D^{n-j}(q) + \sum_{j=0}^n a_j (n-j) D^{n-j-1}(q) \\ &= tL(q) + L'(q). \end{aligned}$$

Formula za $L(t^k q(t))$

Trditev

Če je $q(t)$ n -krat odvedljiva funkcija na $I \subset \mathbb{R}$ in je $L = P(D)$ linearen diferencialni operator reda n s konstantnimi koeficienti, velja za vsak $k \in \mathbb{N}$ formula

$$L(t^k q(t)) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} L^{(j)}(q), \quad L^{(j)} = P^{(j)}(D).$$

Dokaz Denimo, da formula velja za nek k in jo dokažimo za $k+1$:

$$\begin{aligned} L(t^{k+1} q) &= tL(t^k q) + L'(t^k q) \\ &= t \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} L^{(j)}(q) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} L^{(j+1)}(q) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k+1-j} L^{(j)}(q) + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} t^{k+1-j} L^{(j)}(q). \end{aligned}$$

Upoštevaje identiteto $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$ dobimo iskano formulo.

Formula za $L(t^k e^{\lambda t})$

Sedaj izberimo

$$q(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} L(e^{\lambda t}) &= P(\lambda)e^{\lambda t}, \\ L^{(j)}(e^{\lambda t}) &= P^{(j)}(\lambda)e^{\lambda t}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Odtod in iz prejšnje trditve dobimo naslednjo formulo.

Trditev

Če je $L = P(D)$ linearen diferencialni operator reda n s konstantnimi koeficienti, velja za vsak $k \in \mathbb{N}$ formula

$$\begin{aligned} L(t^k e^{\lambda t}) &= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} P^{(j)}(\lambda) \\ &= e^{\lambda t} \left(P(\lambda)t^k + kP'(\lambda)t^{k-1} + \dots + P^{(k)}(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Rešitve nehomogene enačbe

Odtod vidimo, da ima vsaka nehomogena linearna enačba

$$Lx = \sum_{j=0}^n a_j x^{(n-j)} = Q(t)e^{\lambda t},$$

kjer je Q polinom stopnje k in $\lambda \in \mathbb{C}$, rešitev oblike

$$x(t) = R(t)e^{\lambda t},$$

kjer je $R(t)$ polinom iste stopnje k , če je $P(\lambda) \neq 0$, ter stopnje $k+j$, če je

$$P(\lambda) = 0, \dots, P^{(j-1)}(\lambda) = 0, P^{(j)}(\lambda) \neq 0.$$

V slednjem primeru lahko vzamemo $R(t) = t^j R_1(t)$ za nek polinom $R_1(t)$ stopnje k . Na ta način lahko poiščemo partikularno rešitev vsake nehomogene enačbe oblike

$$Lx = \sum_{j=1}^m Q_j(t)e^{\lambda_j t},$$

kjer so Q_j polinomi in so $\lambda_j \in \mathbb{C}$ realne ali kompleksne konstante.

Operatorji z nekonstantnimi koeficienti

Dobljene formule za izraze $L(t^k q(t))$ in v posebnem za $L(t^k e^{\lambda t})$ veljajo tudi, če koeficienti $a_j(t)$ operatorja L niso konstantni.

V tem primeru je karakterističen polinom funkcija dve spremenljivki:

$$P(t, \lambda) = \sum_{j=0}^n a_j(t) \lambda^{n-j},$$

torej je polinom v λ in zvezna funkcija v t . Operatorje $L^{(j)}$ v tem primeru definiramo s predpisom

$$L^{(j)} = P^{(j)}(t, D), \quad \text{kjer je } P^{(j)}(t, \lambda) = \frac{\partial^j P(t, \lambda)}{\partial \lambda^j}.$$

Bistvena razlika je v tem, da so sedaj koreni $\lambda_j = \lambda_j(t)$ enačbe $P(t, \lambda) = 0$ funkcije spremenljivke t . Funkcija $x(t) = e^{\lambda t}$ v splošnem ni rešitev homogene enačbe $Lx = 0$ za nobeno konstanto λ . Prav tako nam dobljene formule ne dajo partikularnih rešitev za desne strani obravnanega tipa.