

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Enačba nihanja

V tem predavanju si bomo ogledali **enačbo dušenega nihanja**

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad k \geq 0, \quad \omega > 0$$

ter sorodno nelinearno enačbo nihanja

$$\ddot{x} + k\dot{x} + q(x) = 0,$$

kjer je $q(0) = 0$ in $q'(0) > 0$.

Dobljene rešitve bomo uporabili pri rešitvi valovne enačbe $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

Enačba nihanja

Enačba

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

matematično gledano sprašuje po negativnih lastnih vrednostih in lastnih funkcijah operatorja $Lx = \ddot{x}$:

$$Lx = -\omega^2 x = \lambda x, \quad \lambda < 0.$$

S fizikalnega vidika enačba opisuje nihanje delca okrog ravnovesne lege $x = 0$ brez prisotnosti trenja (npr., nihanje idealne vzmeti, nihanje nihala, nihanje delca v elektromagnetnem valovanju, višina gladine morja na določeni točki ob valovanju, itd.)

Karakteričen polinom je $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ z ničloma $\lambda = \pm i\omega$. Splošna kompleksna rešitev je torej $z(t) = Ce^{i\omega t}$ ($C \in \mathbb{C}$), realna rešitev pa

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega(t - t_0)), \quad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

To je nihanje (oscilacija) s kotno hitrostjo ω in amplitudo $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Energija se ohranja

Število $t_0 \in \mathbb{R}$ zadošča zahtevama

$$\cos(\omega t_0) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin(\omega t_0) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

enakost pa sledi iz adicijskega izreka.

Energija sistema je funkcija

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2},$$

to je vsota **kinetične energije** $\dot{x}^2/2$ in **potencialne energije** $\omega^2 x^2/2$. Njen odvod vzdolž rešitve $x(t)$ je enak

$$\frac{d}{dt} E(x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)\dot{x}(t) = \dot{x}(t)(\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)) = 0.$$

Fizikalno: Energija sistema se ohranja vzdolž vsake rešitve.

Matematično: energija E je prvi integral enačbe.

Dušeno nihanje

Enačba dušenega nihanja vsebuje dodatni člen $2p\dot{x}$, kjer je $p > 0$ faktor dušenja:

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

V splošnem je lahko $p = p(t)$ funkcija časa t . Oglejmo si primer, ko je p konstanta. Karakteristični polinom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2p\lambda + \omega^2$$

z ničlami

$$\lambda_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega^2} = -p \pm i\sqrt{\omega^2 - p^2}.$$

Če je $p > \omega$ (faktor dušenja je večji od kotne hitrosti), sta lastni vrednosti realni negativni in splošna rešitev je

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

Pri $t \rightarrow +\infty$ gre rešitev eksponentno proti nič; do nihanja sploh ne pride. Podobno je v mejnem primeru $p = \omega$, ko je splošna rešitev

$$x(t) = e^{-\omega t}(A + Bt).$$

Dušeno nihanje

Poglejmo sedaj najpomembnejši primer, ko je $0 < p < \omega$. Označimo

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - p^2}.$$

Splošna rešitev je

$$x(t) = e^{-pt} (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) = e^{-pt} \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega_0(t - t_0)).$$

Amplituda nihanja se zmanjšuje s faktorjem e^{-pt} .

Odvod energije vzdolž rešitve je enak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x(t), \dot{x}(t)) &= \dot{x}(t) \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) \dot{x}(t) \\ &= \dot{x}(t) (\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)) \\ &= -2p\dot{x}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Energija sistema se eksponentno zmanjšuje, rešitve konvergirajo proti mirovni legi pri $t \rightarrow +\infty$.

Matematično: Energija E je funkcija Lyapunova prirejenega sistema

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -2pv - \omega^2 x.$$

Nelinearna enačba nihanja

Oglejmo si še enačbo

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + q(x) = 0, \quad q(0) = 0, \quad q'(0) > 0.$$

Enačbe v splošnem ne moremo rešiti eksplicitno, lahko po kvalitativno opišemo rešitve in obnašanje v okolici mirovne lege $x = 0$. V ta namen definiramo **potencialno energijo** U in **totalno energijo** E :

$$U(x) = \int_0^x q(s)ds, \quad E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

Nivojnice energije E za majhne vrednosti $E > 0$ so sklenjene krivulje okrog izhodišča v fazni ravnini $(x, \dot{x})$. Odvod energije vzdolž tokovnice je

$$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + q(x)\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + q(x)) = -2p\dot{x}^2 \leq 0.$$

V primeru $p = 0$ (ni dušenja) je torej E prvi integral pridruženega sistema za $(x, \dot{x})$. Tak sistem se imenuje **konservativen**.

Če je $p > 0$, pa je E funkcija Lyapunova v okolici $(0, 0)$. Tokovnice krožijo okrog izhodišča $(0, 0)$ in se mu spiralno približujejo, ko gre $t \rightarrow +\infty$.

Matematično nihalo

Konkreten primer je **matematično nihalo** (brez trenja), kjer x predstavlja kot:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0.$$

Tedaj je $U(x) = \omega^2(1 - \cos x)$, $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2(1 - \cos x) \geq 0$.

Prirejeni sistem

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 \sin x$$

je periodičen s periodo 2π v x -spremenljivki. Tak je tudi njegov fazni portret, ki ga določajo nivojnice $E = C$.

Stacionarne točke (točke mirovanja) so pri $E = 0$, to so $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Za vrednosti $0 < C < 2\omega^2$ je nivojnica $E = C$ sklenjena krivulja okrog vsake stacionarne točke $(2k\pi, 0)$. Tok potuje od leve na desno pri $\dot{x} > 0$ in od desne na levo pri $\dot{x} < 0$.

Pri mejni vrednosti $C = 2\omega^2$ dobimo t.i. **separatrico**, ki povezujejo točki $(-\pi, 0)$ in $(+\pi, 0)$ (ter splošneje $((2k-1)\pi, 0)$ in $((2k+1)\pi, 0)$).

Za $C > 2\omega^2$ pa dobimo dve odprti periodični krivulji, simetrični glede na x -os. Energije sistema je sedaj tako velika, da se nihalo vrti vselej v isto smer.

Enačba nihanja strune

S temi orodji lahko obravnavamo valovno enačbo za funkcijo $u(t, x)$:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, \ell) = 0 \quad \text{za vsak } t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Ta predstavlja npr. nihanje strune dolžine ℓ , ki je vpeta na krajiščih.

Iščemo stacionarne (razcepne) rešitve $u(t, x) = T(t)X(x)$. Z ločitvijo spremenljivk dobimo dve navadni diferencialni enačbi:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = -c^2 \lambda \in \mathbb{R}, \quad X(0) = X(\ell) = 0.$$

Enačba za funkcijo $X(x)$ je

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0.$$

Naj bo $\lambda > 0$. Neupoštevaje robne pogoje imamo splošno rešitev

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Pri $x = 0$ je $X(0) = A = 0$, zato je $X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

Na krajišču $x = \ell$ dobimo pogoje

$$\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0, \quad \lambda_k = (k\pi/\ell)^2, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Nihanje strune

S tem smo dobili naslednje zaporedje rešitev enačbe za $X(x)$:

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Prepričaj se, da primer $\lambda \leq 0$ ne vodi do netrivialnih rešitev problema.

Števila λ_k vstavimo v enačbo za $T(t)$:

$$\ddot{T} + c^2 \lambda_k T = \ddot{T} + c^2 (k\pi/\ell)^2 T = 0.$$

Splošna rešitev je

$$T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}ct\right).$$

Splošno rešitev valovne enačbe dobimo s superpozicijo stacionarnih valov:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x).$$

Seveda je potrebno obravnavati konvergenco dobljene trigonometrijske vrste.