

L'HÔPITALOVO PRAVILO

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{Ls } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ALI

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \stackrel{\text{L'H } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}$$

↓
1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \frac{1}{\cos^4 x} 2 \cos x \sin x + \sin x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{1}{\cos^3 x} + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x}; \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\xrightarrow{L'H} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} \xrightarrow{L'H} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n! x^0 = 1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln x \ln(x+1) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{\ln x}} \quad \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \text{L'H} \\ = \end{matrix}$$

$\downarrow$ $-\infty$ $\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0

$$= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x+1} \left[-x (\ln x)^2 \right] \quad \begin{matrix} \downarrow 1 & \downarrow 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} x (\ln x)^2 = \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} \quad \begin{matrix} \text{L'H} \\ = \end{matrix}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow \infty$

$$= \lim_{x \downarrow 0} \frac{2 \ln x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \downarrow 0} -2 x \ln x =$$

$$\text{L'H} \quad \underline{1}$$

$$= -2 \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 2 \lim_{x \downarrow 0} x = 0$$

$$k = 0$$

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Razširimo f do f_1 , zvezna funkcija

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

A je f_1 povsod odvedljiva? Ali je zvezno odvedljiva?

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ zvezna,}$$

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{za} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_1(0)?$$

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{za} \quad x \neq 0$$

↓

$$f_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$\downarrow \qquad \downarrow$
 $0 \qquad -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x); & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

Ali obstaja $f_1'(x)$, $x \neq 0$?

$$f_1'(x) = (x^2 \sin(\frac{1}{x}))' = 2x \sin(\frac{1}{x})$$

$\downarrow$
 $x \neq 0$

$$+ x^2 \cos(\frac{1}{x}) \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}); \text{ je definirano za } x \neq 0$$

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0}}_{f_1'(0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = 0$$

$$f_1'(x) = \begin{cases} \underline{2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

Ali je f_1' zvezna funkcija?

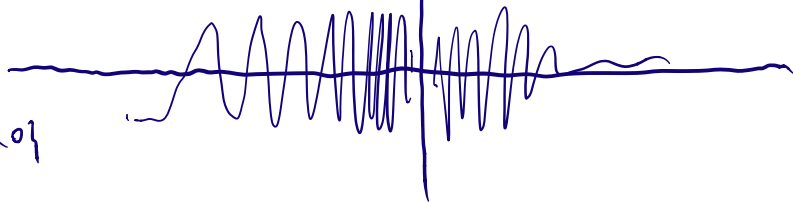
$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \dots \text{ne obstaja}$$

↓
0

↓
ne obstaja

(skica $\cos(\frac{1}{x})$)

↑
zostan
na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



! Torej f_1' ne moremo razširiti do zvezne funkcije na $\mathbb{R}$.

f_1' ni zvezen

Rollov in Lagrangeov izrek

Rollov izrek

$$\underline{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}}$$

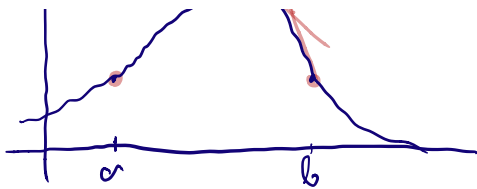
$$f(a) = f(b)$$

- * {
- f odvedljiva na $[a, b]$
(obstaja odvod f' za
točke $\forall (a, b)$,
in a in b pa obstaja
levi in desni odvod)
 - f zvezno odvedljiva na (a, b)

Rollov izrek:

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$



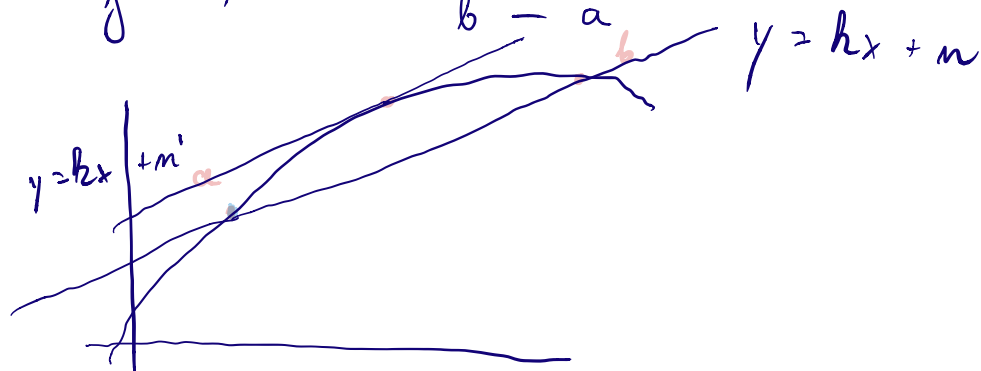


Lagrangeov izrek:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, nelja *

$\exists c \in (a, b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f' zvezno odvedljiva
na (a, b) , f' je omejen
na (a, b) .
 f enakomerno zvezna na (a, b) .

ENAKOMERNA ZVEZNOST:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D_f$:

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Recimo, da obstaja $M > 0$, da nelja

$$|f(x_1) - f(x_2)| < M |x_1 - x_2| < \star$$

(funkcije, ki zadoščajo temu pogoju, so Lipschitzove)

Recimo, da velja $M > 0$, $\varepsilon > 0$

$$|x_1 - x_2| < \varepsilon$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < M |x_1 - x_2| < M \cdot \varepsilon$$

$$\mathcal{J} := \frac{\varepsilon}{M} ?$$

$$|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < M |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

$$\wedge \frac{\varepsilon}{M}$$

za vsak $\varepsilon > 0$ lahko vzamemo $\mathcal{J} := \frac{\varepsilon}{M}$.

Torej je f , za katero velja $\star$, res enakomerno zvezna funkcija.

Lagrangeov izrek:

$$x_1 < x_2, \quad x_1, x_2 \in [a, b]$$

$$\exists c: \quad x_1 < c < x_2$$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

(f' je omejen na (a, b) !)

$$|f'(c)| \cdot |x_2 - x_1| = |f(x_2) - f(x_1)|$$

$$\exists M > 0 : |f'(c)| < M \quad \text{za vse} \\ c \in (a, b)$$

Torej je za $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| < M |x_2 - x_1|$$

Torej je f enakomerno zvezna na (a, b) .

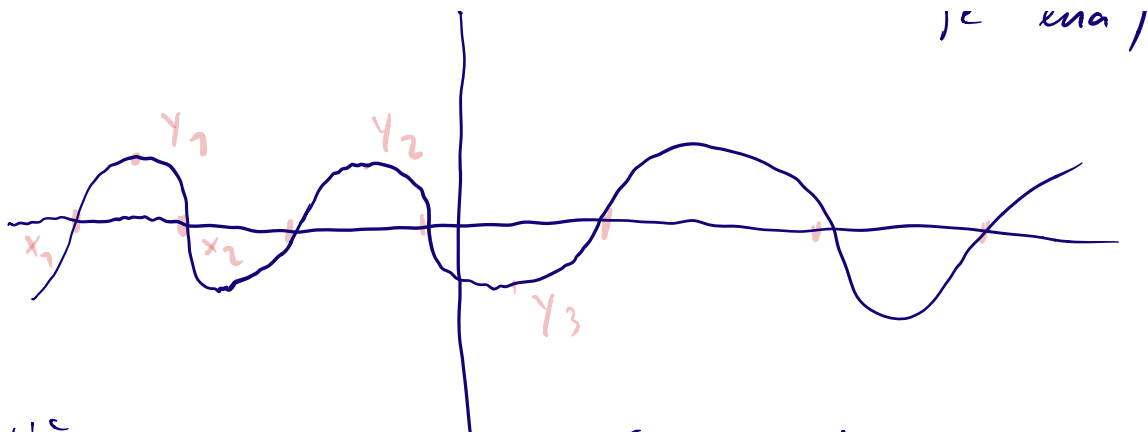
$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ realni polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

ki ima same realne ničle.

Dokaži, da ima tudi p' same realne ničle.

a) p ima k različne realne ničle (večkratnost vsake ničle)



Ničla p : $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$
 ekstremi so ničla odvoda

$x_1 < x_2$, obstaja $x_1 < y_1 < x_2$,
 da je $p'(y_1) = 0$ (Rollov izrek)

$x_i < x_{i+1}$, obstaja $x_i < y_i < x_{i+1}$,
 ↓ ↙
 ničli p
 da je $p'(y_i) = 0$ (Rollov izrek)

$i = 1, 2, \dots, n-1$

$\Rightarrow p'$ ima $n-1$ realnih ničel:
 $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$

stopnja p' je $n-1$, p' ima $n-1$ realnih ničel

$\Rightarrow$ vse ničle p' so realne. ✓

b) p ima same realne ničle
(s poljubno večkratnostjo)

$$p(x) = a (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_l)^{k_l}$$

$x_1 < x_2 < \cdots < x_l$ ničle p

za vsake $i = 1, \dots, l$ je
 $k_i \geq 1$, večkratnost ničle x_i

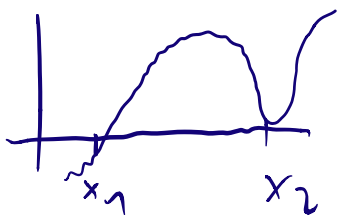
p je stopnje n :

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$$

Iščemo ničle p'

za vsake $i = 1, \dots, l-1$

obstaja ničla odvoda (po Rollovi izreku)



$$x_i < x_{i+1}$$

obstaja

$$x_i < y_i < x_{i+1}$$

...

da je $p'(y_i) = 0$

Torej imamo $l-1$ različnih ničel p' .
Mi jih želimo najti $n-1$.
Kje so ostale ničle p' ?

$$p(x) = a (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_l)^{k_l}$$

Trditev: Če je za $1 \leq i \leq l$ $k_i > 1$,
potem je $p'(x_i) = 0$.

Verjetnost te ničle je $k_i - 1$.

$$p(x) = (x-x_i)^{k_i} g(x)$$

$$\hookrightarrow a(x-x_1)^{k_1} \cdots (x-x_{i-1})^{k_{i-1}} \cdot (x-x_{i+1})^{k_{i+1}} \cdots (x-x_l)^{k_l}$$

$$g(x) = \frac{p(x)}{(x-x_i)^{k_i}}$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= k_i (x-x_i)^{k_i-1} g(x) + (x-x_i)^{k_i} g'(x) = \\ &= (x-x_i)^{k_i-1} \left[\underbrace{k_i g(x)}_{\text{polinom}} + (x-x_i) \underbrace{g'(x)}_{\text{polinom}} \right] \end{aligned}$$

polinom

x_i je ničla od p' z večkratnostjo
(vsaj) $h_i - 1$

Sedaj preštejmo ničla p' :
za vsak i je večkratnost ničle x_i
enaka (vsaj) $h_i - 1$ (to pomeni, da je lahko
tudi enaka nič)

Ničla p' :

• $x_1, \dots$ ničla z večkratnostjo (vsaj) $h_1 - 1$

• $\dots$

• $x_l, \dots$ ničla z večkratnostjo (vsaj) $h_l - 1$

• $l - 1$ ničel $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}$, vsaka ima
večkratnost vsaj 1

Skupaj :

$$\begin{aligned} \# \text{ ničel } p' &\geq \sum_{i=1}^l (h_i - 1) + l - 1 = \\ &= \sum_{i=1}^l h_i - l + l - 1 = \end{aligned}$$

$$= m - l + l - 1 = m - 1$$

realnih

Torej je št. ničel p' vsaj $m-1$.

Seveda je št. ničel medu $m-1$.

Torej ima p' vsaj $m-1$ realnih ničel

Naj bo f zvezna na $[a, b]$, zvezno odvedljiva na (a, b) .

$f(a) = f(b) = 0$. Fiksiramo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dokaži, da obstaja $c \in (a, b)$, da velja:

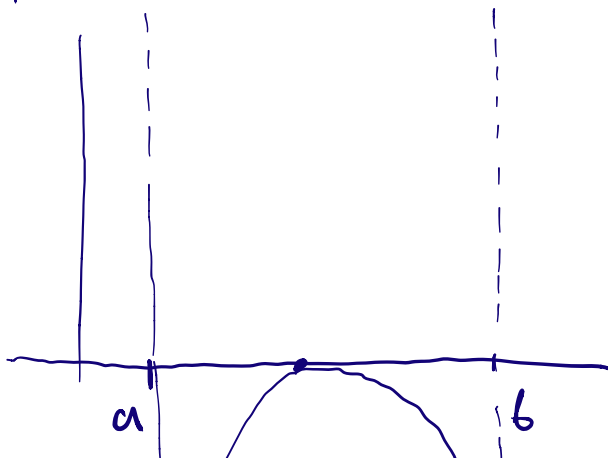
$$\alpha f(c) + f'(c) = 0$$

ena možnost: dokaži, da za vsake $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcija $\frac{f'(c)}{f(c)}$ doseže vrednost $-\alpha$ v

nekem $c \in (a, b)$

$$g(x) := -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$





V vsakem primeru, lahko bi našli
nek $x \in (a, b)$, da je $f(x) = \alpha$.

druga možnost:

NAMIG: ogledamo si funkcijo

$$h(x) := e^{\alpha x} f(x)$$

$$h(a) = h(b) = 0$$

Obstaja $c \in (a, b)$, da velja:

$$h'(c) = 0$$

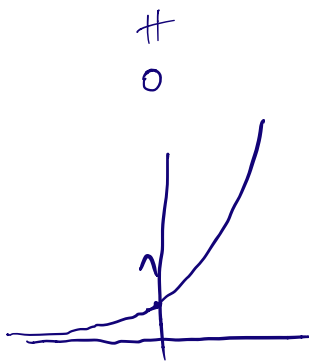
$$h'(x) = [e^{\alpha x} f(x)]' =$$

$$= e^{\alpha x} \cdot \alpha \cdot f(x) + e^{\alpha x} f'(x) =$$

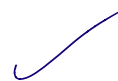
$$= e^{\alpha x} [\alpha f(x) + f'(x)]$$

ta nek $c \in (a, b)$ bo:

$$e^{\alpha c} \cdot [\alpha f(c) + f'(c)] = 0$$



$$af(c) + f'(c)$$



Ekstremi Funkcij

f zvezna, zvezno odvedljiva na (a, b) .

$x \in (a, b)$ ekstrem funkcije

(torej): $f(x) = \max_{x \in (a, b)} f(x)$ ali

$$f(x) = \min_{x \in (a, b)} f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

Iščemo ekstreme funkcije na $[a, b]$.

$\hookrightarrow$ zv. odv. na (a, b)

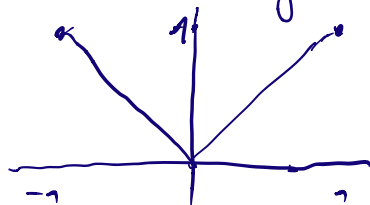
Možnosti za ekstreme:

- stacionarne točke (tj. ničle odvoda)
- krajišča intervala

Iščemo ekstreme funkcije na $[a, b]$

- stac. točk
- krajišča intervala
- točke, kjer f ni zvezna
- točke, kjer f ni odvedljiva

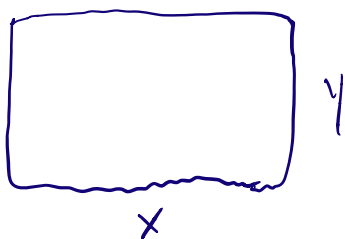
↳ minimum funkcije $|x|$ na $[-1, 1]$



- minimum funkcije je dosežen v točki, kjer f ni odvedljiva
- maksimum funkcije je dosežen na krajiščih intervala

Imamo žico dolžine $l > 0$, ki jo prepognemo v pravokotnik s stranicama $x, y > 0$.

Za katero x, y bo imel pravokotnik največjo površino?



- Iščemo maksimum funkcije xy
- $l = 2x + 2y$
 $\Rightarrow y = \frac{1}{2}(l - 2x)$

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{2} (l - 2x) \quad ; \quad (l \text{ je konstanta, ki je določena naprej})$$

Iščemo maksimum f na
 $0 < x < \frac{l}{2}$

Iščemo ekstreme $f(x)$ za $x \in [0, \frac{l}{2}]$

V krajščih intervala bo vrednost f enaka nič

stac. točke:

$$f'(x) = \frac{1}{2} (l - 2x) + \frac{1}{2} x (-2) = \\ = \frac{l}{2} - x - x$$

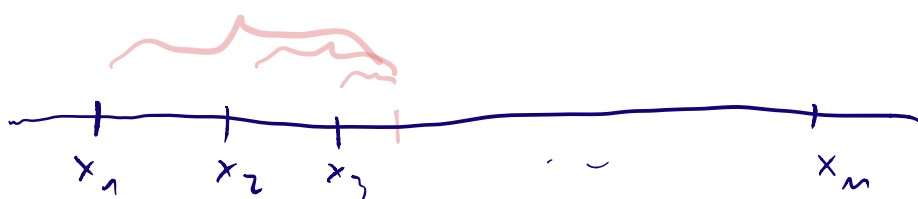
$$0 = \frac{l}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{l}{4}$$

$$f\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\underbrace{l - \frac{l}{2}}_{\frac{l}{2}} \right) = \frac{l^2}{16} = x^2$$

$x_1 < x_2 < \dots < x_n$ realna števila.

Poiskati bomo $x \in \mathbb{R}$, da bo

$$\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 \text{ najmanjša}$$



Mogoče: $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$?

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2, \text{ iščemo ekstreme na } \mathbb{R}$$

ker je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, in

ker je f povsod odvedljiva, bo minimum dosežen v mišči odreda.

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n 2(x - x_i)$$

↓
linearnost
odvajanja

$$= \sum_{i=1}^n 2(x - x_i) = 2 \sum_{i=1}^n (x - x_i)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n 2(x - x_i) \quad \left| : 2 \right. \quad 0 = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x - x_i)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n (x - x_i) \quad \underline{\hspace{10em}} \quad 0 = \sum_{i=1}^n (x - x_i)$$

$$0 = nx - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\sum_{i=1}^n (x - x_i)$$

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

N povprečje je dosežen minimum.

