

Analiza 1: 1. izpit

15. 6. 2020

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- N Obstajajo kompleksna števila a , b in c , za katera je $|a - b| = 2$, $|b - c| = 3$ in $|c - a| = 4$.
- N Za poljubno zvezno funkcijo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ obstaja takšna točka $t \in (a, b)$, da je f odvedljiva v t in da velja $f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- N Krožnica $x^2 + y^2 = 1$ in krivulja, podana v polarnih koordinatah z $r(\phi) = \cos \phi$ za $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se sekata v natanko eni točki.
- N Obstajata konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, za kateri je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergentna.
- N Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = \sin(x^2)$, je enakomerno zvezna na \mathbb{R} .
- N Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Potem je funkcija $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, odvedljiva.
- N Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, za katero je $f(0) = 0$. Potem ima funkcija $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ limito v točki $x = 0$.
- N Obstaja funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je hkrati liha in soda.
- N V metričnem prostoru (M, d) je presek poljubne družine zaprtih podmnožic spet zaprta podmnožica.
- N Naj bosta A in B Dedekindova reza. Potem je tudi množica $C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ Dedekindov rez.

2. naloga (10 točk)

Poišči vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbo

$$|z^4 - i| = |z^4 + i|.$$

3. naloga (15 točk)

Dokaži, da obstaja parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, pri katerem je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1, \\ (x - \alpha) \ln \frac{1}{x}, & x \geq 1, \end{cases}$$

zvezno odvedljiva. V tem primeru določi njeno zalogo vrednosti Z_f in utemelji, zakaj je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow Z_f$ obrnljiva. Izračunaj $(f^{-1})'(1 - e)$.

4. naloga (15 točk)

Podan je integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x \, dx.$$

- a) Določi vse vrednosti parametra $\alpha > 0$, za katere dani integral konvergira.
- b) Izračunaj integral I v primeru, ko je $\alpha = \frac{1}{2}$.

5. naloga (10 točk)

Funkcija $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = (x - 1)\sqrt{x + 1}.$$

Razvij funkcijo f v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. Nato izračunaj odvod $f^{(10)}(0)$.

6. naloga (15 točk)

- a) Naj bosta $f_n, g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zaporedji zveznih funkcij, ki na $[0, 1]$ enakomerno konvergirata k f oziroma g . Pokaži, da je potem zaporedje $f_n g_n$ enakomerno konvergentno na $[0, 1]$.
- b) Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n \cos(\frac{x}{n})}{n + x^2} \, dx.$$

7. naloga (15 točk)

Naj bo $M = [0, 1)$. Element $x \in M$ podamo v dvojiškem zapisu $x = 0.x_1x_2x_3\dots$, v katerem se ne ponavljajo enice od nekod dalje. Nato definiramo metriko $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$d(x, y) = \begin{cases} 2^{-k}, & k = \min \{n : x_n \neq y_n\}, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

- a) Pokaži, da za poljubni odprti krogli prostora (M, d) velja, da sta bodisi disjunktni bodisi je ena podmnožica druge.
- b) Ali je množica $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ kompaktna v (M, d) ?