

Analiza 1

3. izpit

31.8.2020

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadraterk čitljivo označi, če je trditev pravilna **P** oziroma napačna **N**.

Če ne veš, pusti kvadraterk prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ je produkt vseh kompleksnih rešitev enačbe $z^n = 1$ realen.



Če ima polinom vsaj tri različne realne ničle, ima tudi prevoj.



Definicijsko območje funkcije $f(x) = \tan(\arctan x)$ je enako njeni zalogi vrednosti.



Naj bo a_n zaporedje pozitivnih števil z lastnostjo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ pogojno konvergentna.



Integral $\int_0^{\infty} f(x) dx$ je konvergenten natanko tedaj, ko za vsak $M > 0$ obstaja $\epsilon > 0$, da je $\int_0^M f(x) dx < \epsilon$.



Naj bo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ omejena. Potem je f integrabilna na $[0, 1]$.



Za $a > 0$ je množica $A = \{x^2 < a, x \in \mathbb{R}\}$ Dedekindov rez.



Če vrsta $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$ konvergira za $x = 3$, konvergira tudi za $x = 0$.



Predpis $d(x, y) = ||x| - |y||$ podaja metriko na \mathbb{R} .



Zaporedje, ki je omejeno v metričnem prostoru $(\mathbb{R}^2, d_{\infty})$, je omejeno tudi v metričnem prostoru (\mathbb{R}^2, d_1) .

2. naloga (10 točk)

Naj bosta a in b različni kompleksni števili. Pokaži, da točka z leži na premici skozi a in b natanko takrat, ko velja

$$\operatorname{Im}((z-a)(\bar{z}-\bar{b})) = 0.$$

3. naloga (10 točk)

Pokaži, da je vsako zaporedje, ki je podano z zvezo

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cauchyjevo. Za $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$ določi njegovo limito.

4. naloga (10 točk)

Izračunaj integral

$$\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}.$$

5. naloga (20 točk)

Za $n \geq 1$ naj bodo funkcije $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ podane s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln^2 x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Dokaži, da je funkcija $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definirana in zvezna na $[0, 1]$.

b) Dokaži, da je

$$\int_0^1 \frac{x \ln^2 x}{1-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^3}.$$

6. naloga (10 točk)

Za poljubno funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo podmnožico realnih števil

$$\Delta(f) = \left\{ \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \mid s \neq t, s \in (0, 1), t \in (0, 1) \right\}.$$

a) Pokaži, da je $\Delta(f)$ omejena, če je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva.

b) Poišči primer odvedljive funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $\Delta(f)$ neomejena. Dobro utemelji, zakaj f res zadošča pogojem naloge.

7. naloga (20 točk)

Množico $M = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je zvezna omejena funkcija}\}$ opremimo s supremum metriko $d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$, ter z $A \subset M$ označimo podmnožico vseh zvezno odvedljivih funkcij z omejenim odvodom.

a) Ugotovi, ali je A odprta podmnožica M .

b) Ugotovi, ali je preslikava $D: A \rightarrow M$ s predpisom $D(f) = f'$ zvezna.

c) Pokaži, da zaprta krogla $\overline{K}(0, 1)$ ni kompaktna.