

Analiza 1: 3. in 4. kolokvij

2. 6. 2020

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Obstaja funkcija f z lastnostjo: f ni integrabilna na $[0, 1]$, funkcija f^2 pa je.



S predpisom $d(f, g) = \min_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$ je podana metrika na $\mathcal{C}([0, 1])$.



Naj bo $F = (x, y): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizacija gladke enostavne sklenjene krivulje. Potem velja $\int_0^{2\pi} \dot{x}(t)y(t)dt = \int_0^{2\pi} x(t)\dot{y}(t)dt$.



Funkcija $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ je monotona.



V metričnem prostoru je vsaka kompaktna množica omejena.



Izraz $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2+\frac{k}{n}}$ je Riemannova vsota neke eksponentne funkcije na intervalu $[1, 2]$.



Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Če obstaja limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.



Naj bo $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna pozitivna funkcija, za katero obstaja integral $\int_0^\infty f(x)dx$. Potem ima vrtenina, ki jo dobimo, če graf f zavrtimo okoli x -osi, končen volumen.



Funkcija $\ln(1+x)$ je analitična v okolici točke $x = 1$.



Če je funkcija zvezno odvedljiva na intervalu $(0, 1)$, je tam tudi enakomerno zvezna.

2. naloga (10 točk)

Krivulja je podana parametrično s predpisoma

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \arctan(t^3 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Določi stacionarne točke koordinatnih funkcij $x(t)$ in $y(t)$ ter vodoravni asimptoti krivulje.
- Skiciraj krivuljo in določi kot, pod katerim seka samo sebe.

3. naloga (15 točk)

Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx.$$

4. naloga (10 točk)

Ugotovi, za katera realna števila a konvergira posplošeni integral

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x^a + x^{a+2}} dx.$$

5. naloga (20 točk)

Dana je funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sin x + 1)^n}{2^n}.$$

- Določi območje konvergence D dane funkcijske vrste in nato izračunaj njeno vsoto.
- Ali vrsta enakomerno konvergira na D ?

6. naloga (10 točk)

Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija in $x \in \mathbb{R}$. Pokaži, da za vsak $h > 0$ obstaja $t \in (x - h, x + h)$, da velja

$$f''(t) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

7. naloga (15 točk)

Na množico M vseh omejenih realnih zaporedij oblike $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uvedemo metriko s predpisom

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

- Utemelji, da je predpis d dobro definiran in da zanj velja trikotniška neenakost.
- Ugotovi, ali je podmnožica $A \subset M$, ki jo sestavljajo vsa konvergentna realna zaporedja, odprta oziroma zaprta v M .