

Rešitve 2. izpita iz Analize 1

- (1) **N** Če sta funkciji f in g konveksni na $(0, 1)$, je tak tudi njun produkt $f \cdot g$.
- P** Če za analitično funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f^{(n)}(1) = 0$ za vse $n \geq 2020$, je f polinom.
- N** Funkcijo $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ zvezno razširimo na \mathbb{R} . Dobljena razširitev je v točki $x = 0$ zvezno odvedljiva.
- N** V evklidskem prostoru je vsaka zaprta množica kompaktna.
- P** Iz pogoja $f(g(x)) = x$ za vse $x \in \mathbb{R}$ lahko sklepamo, da je $f: Z_g \rightarrow \mathbb{R}$ surjektivna.
- P** Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ skrčitev. Tedaj velja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.
- N** Integral $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$ obstaja natanko tedaj, ko je $\alpha < 1$ in $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna.
- P** V vsakem metričnem prostoru (M, d) za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in poljubne $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ velja, da je $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$.
- N** Vsako zaporedje z enim samim stekališčem je konvergentno.
- P** Intervala $[0, 1]$ in $(0, 1)$ sta ekvipolentna.

- (2) Kompleksno zaporedje (z_n) je podano z začetnim členom z_0 , $\operatorname{Re}(z_0) > 0$, in rekurzivno zvezo

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

zaporedje (w_n) pa s predpisom $w_n = \frac{z_n - 1}{z_n + 1}$.

- a) Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja $\operatorname{Re}(z_n) > 0$ in $|w_n| < 1$.
 b) Izpelji rekurzivno zvezo za zaporedje (w_n) in nato izračunaj limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Rešitev: (a) Najprej bomo z indukcijo pokazali, da je $\operatorname{Re}(z_n) > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Po predpostavki je $\operatorname{Re}(z_0) > 0$, zato moramo dokazati samo indukcijski korak. Pa denimo, da je $\operatorname{Re}(z_n) > 0$ za nek $n \in \mathbb{N}$. To pomeni, da je $z_n = x_n + iy_n$, kjer je $x_n > 0$. Od tod sledi

$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{x_n + iy_n} = \frac{x_n - iy_n}{x_n^2 + y_n^2},$$

kar pa pomeni, da je

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right) = \frac{x_n}{x_n^2 + y_n^2} > 0$$

in posledično

$$\operatorname{Re}(z_{n+1}) = \frac{1}{2}(\operatorname{Re}(z_n) + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)) > 0.$$

Sedaj bomo pokazali, da iz pogoja $\operatorname{Re}(z_n) = x_n > 0$ sledi, da je $|w_n| < 1$. Po definiciji je

$$|w_n|^2 = w_n \overline{w_n} = \left(\frac{z_n - 1}{z_n + 1} \right) \left(\frac{\overline{z_n} - 1}{\overline{z_n} + 1} \right) = \frac{|z_n|^2 - z_n - \overline{z_n} + 1}{|z_n|^2 + z_n + \overline{z_n} + 1} = \frac{|z_n|^2 - 2x_n + 1}{|z_n|^2 + 2x_n + 1}.$$

Ker je $x_n > 0$, je izraz v števcu manjši od izraza v imenovalcu, kar pa pomeni, da je $|w_n|^2 < 1$ oziroma $|w_n| < 1$.

- (b) Z uporabo rekurzivne zveze za zaporedje (z_n) lahko izpeljemo, da velja

$$w_{n+1} = \frac{z_{n+1} - 1}{z_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right) - 1}{\frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right) + 1} = \frac{z_n^2 - 2z_n + 1}{z_n^2 + 2z_n + 1} = \left(\frac{z_n - 1}{z_n + 1} \right)^2 = w_n^2.$$

Od tod hitro vidimo, da je $w_n = w_0^{2^n}$. Označimo sedaj $q = |w_0| < 1$. Potem je

$$|w_n| = |w_0^{2^n}| = q^{2^n}.$$

Ker je $q < 1$, zaporedje (w_n) absolutno konvergira proti 0, posledično pa velja tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0.$$

Za izračun limite zaporedja (z_n) pa lahko najprej iz zveze $w_n = \frac{z_n - 1}{z_n + 1}$ izpeljemo, da velja $z_n = \frac{1 + w_n}{1 - w_n}$ in od tod dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + w_n}{1 - w_n} = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} w_n} = 1.$$

□

- [7] Dokaz, da za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja $\operatorname{Re}(z_n) > 0$ in $|w_n| < 1$.
- [3] Izpeljava rekurzivne zveze za zaporedje (w_n) .
- [5] Izračun limit.

(3) Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- a) Pokaži, da za vsak $x \geq 0$ velja $\operatorname{arctg} x \geq \frac{x}{1+x^2}$.
 b) Izračunaj odvod funkcije f v točki $x = 0$ in v točkah $x \neq 0$. Nato poišči asimptote, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja funkcije f ter skiciraj graf funkcije f .

Rešitev: (a) Ideja dokaza neenakosti $\operatorname{arctg} x \geq \frac{x}{1+x^2}$ za $x \geq 0$ temelji na dejstvu, da $\operatorname{arctg} x$ narašča hitreje kot $\frac{x}{1+x^2}$. Da to formalno dokažemo, najprej označimo $g(x) = \operatorname{arctg} x$ in $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Odvoda funkcij g in h sta:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$h'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Od tod sledi, da za vsak $x > 0$ velja neenakost $g'(x) > h'(x)$. Z uporabo osnovnega izreka analize pa od tod dobimo za $x > 0$ oceno

$$\operatorname{arctg} x = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(x) dx > \int_0^x h'(x) dx = h(x) - h(0) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Za $x > 0$ imamo torej strogo neenakost, pri $x = 0$ pa sta obe strani enaki 0, kar pomeni, da neenakost velja za vsak $x \geq 0$.

(b) Odvod funkcije f v točki $x = 0$ moramo izračunati po definiciji

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{2} = 0.$$

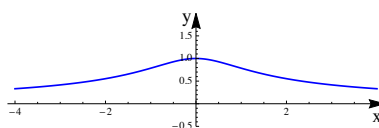
V točkah $x \neq 0$ pa velja

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)' = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{x^2}.$$

Iz neenakosti, ki smo jo dokazali v (a) delu naloge, sledi, da f pada na intervalu $(0, \infty)$, ker je funkcija f soda, pa od tod sledi, da f narašča na $(-\infty, 0)$. V točki $x = 0$ ima f lokalni maksimum. Ker je $\operatorname{arctg} x$ omejena funkcija, je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 0,$$

kar pomeni, da ima f vodoravno asimptoto $y = 0$. Poglejmo še graf funkcije f .



□

- [6] Dokaz neenakosti $\operatorname{arctg} x \geq \frac{x}{1+x^2}$ za $x \geq 0$.
- [6] Izračun odvoda, asimptot, stacionarnih točk in intervalov naraščanja in padanja.
- [3] Graf funkcije f .

- (4) Naj bo L omejen ravninski lik, ki ga omejujeta krivulji $x^2 = 1$ in $y^2 = x^2 + 1$. Izračunaj površino plašča vrtenine, ki jo dobimo, če lik L zavrtimo okoli x -osi.

Rešitev: Računamo površino plašča vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo okoli abscisne osi graf funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ na intervalu $[-1, 1]$. Z upoštevanjem, da je $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, dobimo formulo za površino plašča dane vrtenine

$$P = 2\pi \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + 1}} dx = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{2x^2 + 1} dx.$$

Dani integral bomo izračunali z uporabo algoritma za integracijo korenskih funkcij

$$\int \sqrt{2x^2 + 1} dx = \int \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = (Ax + B)\sqrt{2x^2 + 1} + \int \frac{C}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{4Ax^2 + 2Bx + (A + C)}{\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

S primerjavo koeficientov vidimo, da je $A = C = \frac{1}{2}$ in $B = 0$, od koder sledi

$$\int \sqrt{2x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{2x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{2x^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} \right| + C.$$

Površina plašča vrtenine pa je enaka

$$P = 2\pi \left(\frac{1}{2}x\sqrt{2x^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} \right| \right) \Big|_{-1}^1 = \pi(2\sqrt{3} + \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})).$$

□

- [2] Izpeljava formule za površino plašča vrtenine $P = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{2x^2 + 1} dx$.
- [6] Integracija iracionalne funkcije.
- [2] Površina plašča vrtenine.

(5) Dokaži, da je vrsta pogojno konvergentna in izračunaj njeno vsoto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Namig: Pri računanju vsote si pomagaj z ustrezno potenčno vrsto.

Rešitev: Obravnavamo vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Najprej pokažimo, da ne konvergira absolutno. To sledi iz ocene

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \dots \right) > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \right).$$

Vrsto lahko torej navzdol ocenimo s polkratnikom harmonične vrste, za katero pa vemo, da divergira. Po primerjalnem kriteriju naša vrsta torej ne konvergira absolutno.

Da dana vrsta konvergira, pa lahko dokažemo z uporabo Leibnizevega kriterija. Vrsta je namreč alternirajoča, absolutne vrednosti njenih členov pa monotonno padajo proti 0.

Za izračun vsote vrste definirajmo potenčno vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Preverimo lahko, da ta potenčna vrsta konvergira za $x \in [-1, 1]$ in posledično definira funkcijo $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Njen odvod je

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Z integriranjem dobimo, da je

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C.$$

Ker je $f(0) = 0$, od tod sledi $C = 0$ in

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctg x.$$

Naša potenčna vrsta je torej Taylorjeva vrsta funkcije \arctg okoli točke $x = 0$. Ko vstavimo $x = 1$, pa dobimo

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

□

- [5] Dokaz, da vrsta pogojno konvergira.
- [2] Izbira primerne potenčne vrste.
- [6] Izračun vsote potenčne vrste.
- [2] Vsota številske vrste.

(6) Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pokaži, da je funkcijsko zaporedje

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \text{ za vse } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

enakomerno konvergentno na vsakem zaprtem in omejenem intervalu $[a, b]$. Poišči primer zvezne funkcije f , za katero f_n ni enakomerno konvergentno na \mathbb{R} .

Rešitev: Najprej izračunajmo limitno funkcijo. Ker je f zvezna funkcija, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)\right) = f(x).$$

Od tod sledi, da funkcijsko zaporedje (f_n) po točkah konvergira k funkciji f za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Sedaj bomo pokazali, da je konvergenca enakomerna na vsakem zaprtem in omejenem intervalu $[a, b]$. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Iščemo tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $x \in [a, b]$ in vsak $n \geq N$ velja

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Za $x \in [a, b]$ in $n \in \mathbb{N}$ je $x + \frac{1}{n} \in [a, b + 1]$. Ker je funkcija f zvezna, je po izreku s predavanj enakomerno zvezna na intervalu $[a, b + 1]$. To pomeni, da pri danem $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za poljubna $s, t \in [a, b + 1]$ velja

$$|s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \epsilon.$$

Naj bo sedaj n tako velik, da velja $\frac{1}{n} < \delta$. Za $x \in [a, b]$ označimo $s = x + \frac{1}{n}$ in $t = x$. Potem je $|s - t| < \delta$ in posledično

$$|f_n(x) - f(x)| = |f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)| < \epsilon.$$

Konvergenca ni nujno enakomerna na celi realni osi. Če vzamemo funkcijo $f(x) = x^2$, je

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2\right| = \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right|.$$

Pri fiksnem n gre pri $x \rightarrow \infty$ izraz $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow \infty$, kar pomeni, da konvergenca ne more biti enakomerna. \square

- [6] Dokaz enakomerne konvergence na $[a, b]$.
- [4] Primer, ko zaporedje ni enakomerno konvergentno na \mathbb{R} .

- (7) Množico $M = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je omejena funkcija}\}$ vseh omejenih funkcij na intervalu $[0, 1]$ opremimo s supremum metriko $d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

a) Definirajmo preslikavo $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(f) = \frac{f(\frac{1}{2020}) + f(\frac{2}{2020}) + f(\frac{3}{2020}) + \dots + f(\frac{2020}{2020})}{2020}.$$

Ugotovi, ali je preslikava F zvezna, če \mathbb{R} opremimo z evklidsko metriko.

- b) Naj bo $R \subset M$ podmnožica vseh Riemannovo integrabilnih funkcij na intervalu $[0, 1]$. Utemelji, ali je R odprta, zaprta oziroma kompaktna podmnožica M .

Namig: Omejena funkcija je Riemannovo integrabilna natanko takrat, ko je Darbouxovo integrabilna.

Rešitev: (a) Izberimo poljubno funkcijo $f \in M$ in pokažimo, da je preslikava F zvezna v točki f . To pomeni, da za vsak $\epsilon > 0$ iščemo $\delta > 0$, da bo veljalo

$$d(f, g) < \delta \implies |F(f) - F(g)| < \epsilon.$$

Po definiciji za vsak $x \in [0, 1]$ velja $|f(x) - g(x)| \leq d(f, g)$, kar nam da oceno:

$$\begin{aligned} |F(f) - F(g)| &= \left| \frac{f(\frac{1}{2020}) + \dots + f(\frac{2020}{2020})}{2020} - \frac{g(\frac{1}{2020}) + \dots + g(\frac{2020}{2020})}{2020} \right|, \\ &= \frac{1}{2020} \left| (f(\frac{1}{2020}) - g(\frac{1}{2020})) + \dots + (f(\frac{2020}{2020}) - g(\frac{2020}{2020})) \right|, \\ &\leq \frac{1}{2020} (|f(\frac{1}{2020}) - g(\frac{1}{2020})| + \dots + |f(\frac{2020}{2020}) - g(\frac{2020}{2020})|), \\ &\leq \frac{1}{2020} \left(\underbrace{d(f, g) + \dots + d(f, g)}_{2020 \text{ členov}} \right) = d(f, g). \end{aligned}$$

Za $\delta = \epsilon$ torej iz $d(f, g) < \delta$ sledi $|F(f) - F(g)| \leq d(f, g) < \delta = \epsilon$.

(b) Najprej pokažimo, da R ni odprta podmnožica M . V ta namen si pogledjmo konstantno funkcijo $f(x) = 0 \in R$ in poljubno odprto kroglo $K(f, R)$ za $R > 0$. Potem lahko najdemo omejeno funkcijo $g \in K(f, R)$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} \frac{R}{2}, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1], \end{cases}$$

ki ni Riemannovo integrabilna. Vse njene zgornje Darbouxove vsote so namreč enake $\frac{R}{2}$, spodnje pa so enake 0. To pomeni, da poljubna kroglja $K(f, R)$ vsebuje neintegrabilno funkcijo, torej f ni notranja točka množice R , množica R pa posledično ni odprta.

Prav tako množica R ni kompaktna, saj ni omejena. Razdalja med integrabilnima konstantnima funkcijama $f(x) = 0$ in $f_n(x) = n$ za $n \in \mathbb{N}$ je namreč enaka $d(f, f_n) = n$ in je zato lahko poljubno velika.

Za konec bomo pokazali, da je R zaprta podmnožica M in sicer tako, da bomo pokazali, da je njen komplement odprt. V ta namen vzemimo funkcijo $f \in M$, ki ni Riemannovo integrabilna. S predavanj vemo, da od tod sledi, da je supremum vseh spodnjih Darbouxevih vsot $s(f)$ strogo manjši od infimuma zgornjih Darbouxovih vsot $S(f)$, oziroma

$S(f) - s(f) > 0$. Vzemimo sedaj poljubno funkcijo $g \in M$, za katero je $d(f, g) < R$ in poljubno delitev D intervala $[0, 1]$. Z $s(f, D)$ in $s(g, D)$ označimo spodnji Darbouxovi vsoti funkcij f in g prirejeni delitvi D . Iz pogoja $d(f, g) < R$ sledi, da je $g(x) < f(x) + R$ za vsak $x \in [0, 1]$. Posledično pa od tod sledi tudi, da je

$$s(g, D) \leq s(f, D) + R$$

za vsako delitev D in prav tako za supremum spodnjih Darbouxevih vsot

$$s(g) \leq s(f) + R.$$

Analogno lahko pokažemo, da za infimum zgornjih Darbouxevih vsot velja ocena

$$S(g) \geq S(f) - R.$$

Če izberemo R tako, da bo $2R < S(f) - s(f)$, bo veljalo

$$S(g) - s(g) \geq (S(f) - R) - (s(f) + R) = S(f) - s(f) - 2R > 0,$$

kar pa pomeni, da g ni integrabilna. Pokazali, smo torej, da so vse funkcije v krogli $K(f, R)$ neintegrabilne, kar pa pomeni, da je komplement množice R odprt, množica R pa je posledično zaprta. \square

- [5] Dokaz zveznosti preslikave F .
- [5] Dokaz, da R ni odprta oziroma kompaktna podmnožica.
- [5] Dokaz, da je R zaprta podmnožica.