

Analiza 1: 2. kolokvij

22. 1. 2020

1. naloga (20 točk)

N Vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$ je odvisna od vrstnega reda seštevanja.

N Če je funkcija strogo padajoča na \mathbb{R} , je njena inverzna funkcija definirana za vsa realna števila.

P Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, je taka tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(a_n)$.

N Če za funkcijo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ in $f(0) = 0$, je zvezna v točki $x = 0$.

P Naj bo f zvezna funkcija na \mathbb{R} in naj velja $f(q) = f(-q)$, $q \in \mathbb{Q}$. Potem je f soda.

P Naj bo g zvezna funkcija na \mathbb{R} . Če obstaja $\lim_{x \searrow 0} f(x)$, obstaja tudi $\lim_{x \searrow 0} g \circ f(x)$.

P Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna, zaporedje (a_n) ni monotono.

N Funkciji $\arcsin x^2$ in $\arcsin^2 x$ imata enako zalogo vrednosti.

N Če velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno ali absolutno konvergentna.

P Obstaja liha funkcija, katere kvadrat je liha funkcija.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (20 točk)

Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \log_2(\sin(\pi x) + \sin^2(\pi x))$.

- (a) Določi njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
- (b) Pokaži, da je njena zožitev na interval $(0, \frac{1}{2}]$ injektivna in poišči inverzno funkcijo te zožitve.

Rešitev: Zaradi logaritma mora veljati

$$\sin(\pi x)(1 + \sin(\pi x)) > 0.$$

To je res za $x \in (2k, 2k + 1), k \in \mathbb{Z}$ oz. $D_f = \cup_{k \in \mathbb{Z}} (2k, 2k + 1)$. Funkcija f največjo vrednost doseže pri $x = \frac{1}{2} + 2k\pi$, v robovih D_f pa se zaradi logaritma približuje negativni neskončnosti. Torej je $Z_f(-\infty, 1]$.

Zaradi logaritma injektivnosti velja

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \sin(\pi x) + \sin^2(\pi x) = \sin(\pi y) + \sin^2(\pi y)$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}\sin(\pi x) - \sin(\pi y) &= \sin^2(\pi y) - \sin^2(\pi x), \\ \sin(\pi x) - \sin(\pi y) &= (\sin(\pi y) - \sin(\pi x))(\sin(\pi y) + \sin(\pi x)), \\ (\sin(\pi x) - \sin(\pi y))(\sin(\pi x) + \sin(\pi y) + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Ker sta $x, y \in (0, \frac{1}{2}]$, je edina možnost, da je $x = y$.

Predpis za inverzno funkcijo poiščemo z zamenjavo spremenljivk x in y , nato pa je potrebno rešiti tudi kvadratno enačbo za funkcijo $\sin(\pi y)$ in izbrati ustrezen predznak. Kot rezultat dobimo predpis $f^{-1}: (-\infty, 1] \rightarrow (0, \frac{1}{2}]$, kjer je

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 2^x}}{2}\right).$$

Pogosta napaka: Nekateri ste opazili, da sta funkciji $\sin(\pi x)$ in $\sin^2(\pi x)$ injektivni na $(0, \frac{1}{2}]$, vendar pa to še ne pomeni, da je taka tudi njuna vsota. Vsota dveh injektivnih funkcij ni nujno injektivna, npr. x in $-x + 1$.

Točkovnik:

- +5 Definicijsko območje.
- +5 Zaloga vrednosti.
- +5 Injektivnost.
- +5 Inverzna funkcija.

3. naloga (10 točk)

Zvezna funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + \sqrt{1+x^2}}{x-1} + a, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2} \ln(\cos x), & x \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Določi vrednost konstante $a \in \mathbb{R}$. Nato izračunaj $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Rešitev: Najprej izračunamo limito

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} f(x) &= \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \ln \left(\lim_{x \searrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \ln e^{\lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = \ln e^{\lim_{x \searrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ta vrednost se mora ujemati z vrednostjo $f(0) = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -1 + a$, zato je $a = \frac{1}{2}$. Sedaj izračunamo še limito v negativni neskončnosti, pri čemer moramo paziti, da bomo pred korenem izbrali ustrezní predznak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{|x|}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Točkovnik:

+5 Limita, ko $x \searrow 0$.

+2 Določitev parametra a .

+3 Limita, ko $x \rightarrow -\infty$.

4. naloga (20 točk)

V odvisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} a^n.$$

Pri reševanju lahko uporabiš, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{3}) \cdot (1 - \frac{2}{6}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{2}{3n}) = 0$.

Rešitev: Najprej uporabimo kvocientni kriterij:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 3|a| < 1.$$

Vrsta je torej absolutno konvergentna za $|a| < \frac{1}{3}$.

Če je vrednost $|a| = \frac{1}{3}$, absolutno divergenca potrjuje Raabejev kriterij

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) = \frac{2}{3} < 1.$$

Po drugi strani imamo za $a = -\frac{1}{3}$ opravka z alternirajočo vrsto, pri čemer velja

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot \frac{3n+1}{3n+3} < |a_n|.$$

Iz besedila naloge lahko sklepamo tudi, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

Po Leibnitzevem kriteriju je torej vrsta za $a = -\frac{1}{3}$ pogojno konvergentna.

Nazadnje moramo premisliti, da vrsta divergira tudi za $a < -\frac{1}{3}$ (za $a > \frac{1}{3}$ to pove kvocientni kriterij). Res, za vsak tak a obstaja $0 < \epsilon \leq 2$, da je $|a| \geq \frac{1}{3-\epsilon}$. Torej za $n > (2-\epsilon)/\epsilon$ velja

$$|a_{n+1}| \geq |a_n| \cdot \frac{3n+1}{(3-\epsilon)n + (3-\epsilon)} > |a_n|.$$

V tem primeru je torej zaporedje $|a_n|$ od neke dalje naraščajoče zato členi a_n ne konvergirajo k nič. Vrsta je torej absolutno in pogojno divergentna.

Pogosta napaka: Kljub večkratnim opozorilom na vajah ste nekateri študenti uporabljali kriterije tudi za vrste z nepozitivnimi členi! Nekateri izmed vas pa ste tudi v primeru, ko je $a > 0$ govorili o 'pogojni konvergenca'.

Točkovnik:

+6 Obravnava $|a| < \frac{1}{3}$.

+6 Obravnava $|a| = \frac{1}{3}$.

+6 Obravnava $a = -\frac{1}{3}$.

+2 Obravnava $a < -\frac{1}{3}$.

5. naloga (10 točk)

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta. Pokaži, da je tedaj konvergentna tudi vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_n|}}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Poišči primer pogojno konvergentne vrste, za katero to ne velja.

Pomoč: Za $a, b \in \mathbb{R}$ velja $2ab \leq a^2 + b^2$.

Rešitev: S pomočjo namiga ocenimo

$$\frac{\sqrt{|a_n|}}{\sqrt[3]{n^2}} \leq \frac{|a_n| + \frac{1}{n^{4/3}}}{2}.$$

Ker sta tako $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ kot $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ konvergentni, trditev sledi iz primerjalnega kriterija. Primer pogojno konvergentne vrste, za katero to ni res, je na primer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_n|}}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pogosta napaka: Nekateri ste trdili, da iz absolutne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sledi, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \quad \text{ali} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Tak zaključek v splošnem ne drži!

Točkovnik:

+5 Dokaz trditve.

+5 Primer pogojno konvergentne vrste.

6. naloga (20 točk)

Množica racionalnih števil je števno neskončna, zato jo lahko zapišemo v obliki $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo funkcijo $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x < q_n, \\ 2^{-n} & ; x \geq q_n. \end{cases}$$

Funkcija f je podana kot vsota $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

- (a) Dokaži, da je definicijsko območje funkcije f množica vseh realnih števil.
- (b) Določi $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ in $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Svoj odgovor potrdi z dokazom!
- (c) Dokaži, da je f zvezna v vseh iracionalnih številih in nezvezna v vseh racionalnih številih.

Rešitev: Vrednost $f(x)$ je podana z vrsto. Utemeljiti moramo torej, zakaj je ta vrsta vselej konvergentna. Za konkreten $x \in \mathbb{R}$ seštevamo števno mnogo členov (absolutno) konvergentne geometrijske vrste, katere vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja. Zato velja

$$0 < f(x) = \sum_{q_n \leq x} \frac{1}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Nadalje velja

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ in } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1.$$

Res, naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da lahko ocenimo rep vrste

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Ker je naravnih števil z lastnostjo $n < n_0$ končno, obstaja $M > 0$, da velja

$$|q_n| > M \Rightarrow n > n_0.$$

Posledično za $x < -M$ velja

$$|f(x) - 0| < \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Podobno za $x > M$ velja

$$|1 - f(x)| < \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Podobno idejo uporabimo tudi za dokaz zveznosti f v točki $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Konkretno, za $\epsilon > 0$ število $n_0 \in \mathbb{N}$ definirano na enak način kot zgoraj. Naj bo $\delta > 0$ dovolj majhen, da na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ ni racionalnih števil $q_n, n < n_0$. Torej velja

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Nasprotno je $a \in \mathbb{Q}$ enak $a = q_m$ za nek $m \in \mathbb{N}$. Torej za vsak $x < a$ velja

$$f(a) - f(x) > \frac{1}{2^m}.$$

Posledično $\lim_{x \nearrow a} f(x) \neq f(a)$ in funkcija f ni zvezna v a .

Točkovnik:

- +4 Obrazložitev definicijskega območja.
- +6 Določitev obeh limit z utemeljitvijo.
- +5 Dokaz zveznosti za $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- +5 Dokaz zveznosti za $a \in \mathbb{Q}$.