

Analiza 1: 2. kolokvij

22. 1. 2020

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

R Vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$ je odvisna od vrstnega reda seštevanja.

R Če je funkcija strogo padajoča na \mathbb{R} , je njena inverzna funkcija definirana za vsa realna števila.

R Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, je taka tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(a_n)$.

R Če za funkcijo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ in $f(0) = 0$, je zvezna v točki $x = 0$.

R Naj bo f zvezna funkcija na \mathbb{R} in naj velja $f(q) = f(-q)$, $q \in \mathbb{Q}$. Potem je f soda.

R Naj bo g zvezna funkcija na \mathbb{R} . Če obstaja $\lim_{x \searrow 0} f(x)$, obstaja tudi $\lim_{x \searrow 0} g \circ f(x)$.

R Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna, zaporedje (a_n) ni monotono.

R Funkciji $\arcsin x^2$ in $\arcsin^2 x$ imata enako zalogo vrednosti.

R Če velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno ali absolutno konvergentna.

R Obstaja liha funkcija, katere kvadrat je liha funkcija.

2. naloga (20 točk)

Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \log_2(\sin(\pi x) + \sin^2(\pi x))$.

- (a) Določi njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
- (b) Pokaži, da je njena zožitev na interval $(0, \frac{1}{2}]$ injektivna in poišči inverzno funkcijo te zožitve.

3. naloga (10 točk)

Zvezna funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + \sqrt{1+x^2}}{x-1} + a, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2} \ln(\cos x), & x \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Določi vrednost konstante $a \in \mathbb{R}$. Nato izračunaj $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4. naloga (20 točk)

V odvisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} a^n.$$

Pri reševanju lahko uporabiš, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{3}) \cdot (1 - \frac{2}{6}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{2}{3n}) = 0$.

5. naloga (10 točk)

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta. Pokaži, da je tedaj konvergentna tudi vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_n|}}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Poišči primer pogojno konvergentne vrste, za katero to ne velja.

Pomoč: Za $a, b \in \mathbb{R}$ velja $2ab \leq a^2 + b^2$.

6. naloga (20 točk)

Množica racionalnih števil je števno neskončna, zato jo lahko zapišemo v obliki $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo funkcijo $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x < q_n, \\ 2^{-n} & ; x \geq q_n. \end{cases}$$

Funkcija f je podana kot vsota $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

- (a) Dokaži, da je definicijsko območje funkcije f množica vseh realnih števil.
- (b) Določi $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ in $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Svoj odgovor potrdi z dokazom!
- (c) Dokaži, da je f zvezna v vseh iracionalnih številih in nezvezna v vseh racionalnih številih.