

Analiza 1

3. in 4. kolokvij

2. 6. 2020

1. naloga (20 točk)

- P** Obstaja funkcija f z lastnostjo: f ni integrabilna na $[0, 1]$, funkcija f^2 pa je.
- N** S predpisom $d(f, g) = \min_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$ je podana metrika na $\mathcal{C}([0, 1])$.
- N** Naj bo $F = (x, y): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizacija gladke enostavne sklenjene krivulje. Potem velja $\int_0^{2\pi} \dot{x}(t)y(t)dt = \int_0^{2\pi} x(t)\dot{y}(t)dt$.
- P** Funkcija $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ je monotona.
- P** V metričnem prostoru je vsaka kompaktna množica omejena.
- P** Izraz $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2+\frac{k}{n}}$ je Riemannova vsota neke eksponentne funkcije na intervalu $[1, 2]$.
- N** Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Če obstaja limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- P** Naj bo $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna pozitivna funkcija, za katero obstaja integral $\int_0^\infty f(x)dx$. Potem ima vrtenina, ki jo dobimo, če graf f zavrtimo okoli x -osi, končen volumen.
- P** Funkcija $\ln(1+x)$ je analitična v okolici točke $x = 1$.
- N** Če je funkcija zvezno odvedljiva na intervalu $(0, 1)$, je tam tudi enakomerno zvezna.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

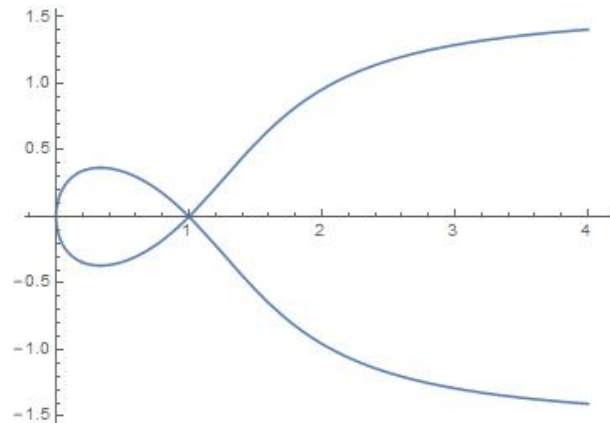
2. naloga (10 točk)

Krivulja je podana parametrično s predpisoma

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \arctan(t^3 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Določi stacionarne točke koordinatnih funkcij $x(t)$ in $y(t)$ ter vodoravni asimptoti krivulje.
- Skiciraj krivuljo in določi kot, pod katerim seka samo sebe.

Rešitev: Funkcija $x(t)$ ima stacionarno točko v $(0, 0)$, funkcija $y(t)$ pa v $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \arctan\left(\mp\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)$. Vodoravni asimptoti pa imamo pri $t \rightarrow \pm\infty$, ko gre $y \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$.



Samopresečišče se zgodi pri parametru $t = \pm 1$. Ker velja

$$k(\pm 1) = \frac{\dot{y}(\pm 1)}{\dot{x}(\pm 1)} = \pm 1,$$

krivulja samo sebe seka pod pravim kotom.

Točkovnik:

- +2 Stacionarne točke.
- +2 Vodoravni asimptoti.
- +3 Skica krivulje.
- +3 Izračun kota.

3. naloga (15 točk)

Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx.$$

Rešitev: Integral lahko rešimo na več načinov. Prvi je z vpeljavo nove spremenljivke

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}.$$

V tem primeru dobimo

$$I = \int \frac{-6t^2}{(t^2-1)} dt = A \ln |t-1| + B \ln |t+1| + \frac{Ct+D}{t^2-1} + E.$$

Z odvajanjem ugotovimo, da je $B = -A = \frac{3}{2}$, $C = 3$ in $D = 0$.

Druga možnost je uporaba nastavka za iracionalne funkcije

$$I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)(x+1)}} dx = C\sqrt{x^2-x-2} + \int \frac{D}{\sqrt{x^2-x-2}} dx.$$

V tem primeru dobimo $C = 1$ in $D = \frac{3}{2}$, nato pa integriramo še

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}} = \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x-2} \right| + E.$$

Do enakega nedoločenega integrala pridemo tudi z metodo per partes za

$$u = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}, \quad dv = dx \Rightarrow du = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \frac{3}{(x-2)^2}, \quad v = x-2.$$

Tretja možnost je, da za spremenljivko izberemo

$$t = \sqrt{x-2}.$$

Tedaj za $u = \frac{t}{\sqrt{3}}$ dobimo

$$I = 2 \int \sqrt{t^2+3} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt = 2 \int \sqrt{u^2+1} du.$$

Nazadnje uvedemo še $u = \operatorname{sh} v$, da dobimo

$$I = 2 \int \operatorname{ch}^2 v dv = \int (\operatorname{ch} 2v + 1) dv = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2v + v + C.$$

Točkovnik:

- Prvi način: Substitucija - 7 točk, nastavek - 4 točke, konstante - 4 točke.
- Drugi način: Preoblikovanje - 5 točk, nastavek in konstanti - 5 točk, logaritem - 5 točk.
- Tretji način: Vsaka substitucija - 4 točke, integral $\operatorname{ch}^2 v$ - 3 točke.