

Analiza 1: 2. izpit

17. 8. 2020

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna **P** oziroma napačna **N**.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Če sta funkciji f in g konveksni na $(0, 1)$, je tak tudi njun produkt $f \cdot g$.



Če za analitično funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f^{(n)}(1) = 0$ za vse $n \geq 2020$, je f polinom.



Funkcijo $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ zvezno razširimo na \mathbb{R} . Dobljena razširitev je v točki $x = 0$ zvezno odvedljiva.



V evklidskem prostoru je vsaka zaprta množica kompaktna.



Iz pogoja $f(g(x)) = x$ za vse $x \in \mathbb{R}$ lahko sklepamo, da je $f: Z_g \rightarrow \mathbb{R}$ surjektivna.



Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ skrčitev. Tedaj velja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.



Integral $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$ obstaja natanko tedaj, ko je $\alpha < 1$ in $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna.



V vsakem metričnem prostoru (M, d) za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in poljubne $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ velja, da je $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$.



Vsako zaporedje z enim samim stekališčem je konvergentno.



Intervala $[0, 1]$ in $(0, 1)$ sta ekvipolentna.

2. naloga (15 točk)

Kompleksno zaporedje (z_n) je podano z začetnim členom z_0 , $\operatorname{Re}(z_0) > 0$, in rekurzivno zvezo

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

zaporedje (w_n) pa s predpisom $w_n = \frac{z_n - 1}{z_n + 1}$.

- Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja $\operatorname{Re}(z_n) > 0$ in $|w_n| < 1$.
- Izpelji rekurzivno zvezo za zaporedje (w_n) in nato izračunaj limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

3. naloga (15 točk)

Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- Pokaži, da za vsak $x \geq 0$ velja $\operatorname{arctg} x \geq \frac{x}{1+x^2}$.
- Izračunaj odvod funkcije f v točki $x = 0$ in v točkah $x \neq 0$. Nato poišči asimptote, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja funkcije f ter skiciraj graf funkcije f .

4. naloga (10 točk)

Naj bo L omejen ravninski lik, ki ga omejujeta krivulji $x^2 = 1$ in $y^2 = x^2 + 1$. Izračunaj površino plašča vrtenine, ki jo dobimo, če lik L zavrtimo okoli x -osi.

5. naloga (15 točk)

Dokaži, da je vrsta pogojno konvergentna in izračunaj njeno vsoto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Namig: Pri računanju vsote si pomagaj z ustrezno potenčno vrsto.

6. naloga (10 točk)

Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pokaži, da je funkcijsko zaporedje

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad \text{za vse } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

enakomerno konvergentno na vsakem zaprtem in omejenem intervalu $[a, b]$. Poišči primer zvezne funkcije f , za katero f_n ni enakomerno konvergentno na \mathbb{R} .

7. naloga (15 točk)

Množico $M = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je omejena funkcija}\}$ vseh omejenih funkcij na intervalu $[0, 1]$ opremimo s supremum metriko $d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

- Definirajmo preslikavo $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(f) = \frac{f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2}{2020}\right) + f\left(\frac{3}{2020}\right) + \dots + f\left(\frac{2020}{2020}\right)}{2020}.$$

Ugotovi, ali je preslikava F zvezna, če \mathbb{R} opremimo z evklidsko metriko.

- Naj bo $R \subset M$ podmnožica vseh Riemannovo integrabilnih funkcij na intervalu $[0, 1]$. Utemelji, ali je R odprta, zaprta oziroma kompaktna podmnožica M .

Namig: Omejena funkcija je Riemannovo integrabilna natanko takrat, ko je Darbouxovo integrabilna.