

Rešitve 1. kolokvija iz Analize 1

- (1) **P** Vsako Cauchyjevo zaporedje realnih števil je omejeno.
- P** Zaporedje realnih števil s predpisom $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{n}$ je konvergentno.
- P** Podmnožica realnih števil $A = \{\sin(\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}$ ima natančno zgornjo mejo.
- N** Če je A neskončna množica in $B \subset A$ neskončna podmnožica, obstaja injektivna preslikava $i : A \rightarrow B$.
- P** Množici \mathbb{C} in \mathbb{R} sta ekvipolentni.
- N** Naj bo A Dedekindov rez, ki predstavlja število x . Množica $-A = \{-a \mid a \in A\}$ je potem Dedekindov rez, ki predstavlja število $-x$.
- P** Število $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{2019}$ je realno.
- P** Če je realno število $x > 0$ iracionalno, je za vsak $n \in \mathbb{N}$ iracionalno tudi število $\sqrt[n]{x}$.
- N** Obstaja kompleksno število z , za katerega velja $|z - 1 + 2i| = 2$ in $|z + 2| = 1$.
- P** Obstaja zaporedje realnih števil, ki ima za stekališča natanko vsa naravna števila.

- (2) Liho število otrok (predpostavimo, da so vsaj trije) se razporedi po travniku, tako da razdalja med nobenima dvema otrokoma ni enaka. Na znak vsak vzame svoj vodni balon in ga vrže v osebo, ki mu je najbližje in jo zadene ter zmoči. Z indukcijo dokaži, da vsaj ena oseba ostane suha. (Namig: Kaj se zgodi z dvojico, ki si je najbližje?)

Rešitev: Baza indukcije: Recimo, da so na travniku trije otroci A , B in C in brez škode za splošnost predpostavimo, da sta si A in B najbližja. Potem A in B z balonom zmočita eden drugega, zato v vsakem primeru C ostane suh.

Indukcijski korak: Predpostavimo, da zmeraj ostane vsaj en otrok suh, če je na travniku $2k + 1$ otrok in denimo, da imamo na travniku $2k + 3$ otrok. Spet označimo otroka, ki sta si najbližja in ki zmočita eden drugega z A in B . Pokazati želimo, da potem vsaj eden od preostalih $2k + 1$ otrok ostane suh. V ta namen moramo ločiti dva primera. Če nihče od preostalih otrok balona ne vrže v A ali B , lahko po indukcijski predpostavki med njimi najdemo enega, ki ostane suh. Če pa na primer kdo izmed njih balon vrže v A ali B , indukcijske predpostavke ne moremo uporabiti. Vendar pa v tem primeru preostalih $2k$ otrok s svojimi baloni ne bo moglo zmočiti vseh $2k + 1$ otrok, zato tudi v tem primeru vsaj en otrok ostane suh. \square

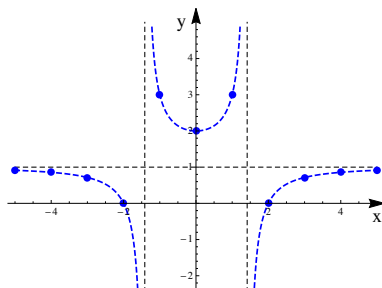
- [3] Baza indukcije.
- [4] Indukcijski korak.
- [3] Utemeljitev v primeru, ko indukcijske predpostavke ne moremo uporabiti.

(3) Dana je podmnožica realnih števil

$$A = \left\{ \frac{m^2 - 4}{m^2 - 2} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Poišči tiste izmed $\min A$, $\max A$, $\inf A$ in $\sup A$, ki obstajajo.

Rešitev: Nalogo lahko rešimo računsko ali pa geometrično. Poglejmo si geometrično rešitev. Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2}$ ima ničli v $x = \pm 2$ in pola v $x = \pm\sqrt{2}$.



Ker nas zanimajo samo vrednosti funkcije f v celih številih, je $\min A = \inf A = 0$ in $\max A = \sup A = 3$. □

- [4] Graf funkcije f .
- [6] Izračun $\min A$, $\max A$, $\inf A$ in $\sup A$.

(4) Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{C}$ oglišča enakostraničnega trikotnika v kompleksni ravnini in s njegovo težišče.

(a) Izračunaj koordinate oglišč b in c , če je $s = 1 + i$ in $a = 2 + 4i$.

(b) Poišči vse enakostranične trikotnike, za katere je $s = 0$ in $abc = 8i$.

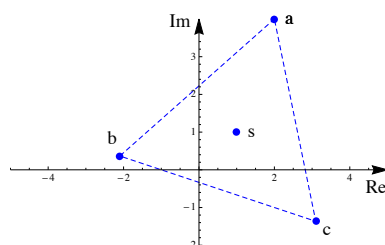
Rešitev: (a) Oglišče b dobimo tako, da zavrtimo daljico sa okoli težišča za 120° . To rotacijo lahko izvedemo z množenjem s kompleksnim številom $e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tako dobimo

$$b = s + e^{\frac{2\pi i}{3}}(a - s) = 1 + i + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + 3i) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Podobno dobimo oglišče c , če zavrtimo daljico sa okoli težišča za 240° . Rezultat je

$$c = s + e^{\frac{4\pi i}{3}}(a - s) = 1 + i + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + 3i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Poglejmo še skico trikotnika.



(b) Naj bo $a \in \mathbb{C}$ eno izmed oglišč trikotnika. Ker je težišče v točki $s = 0$, sta preostali oglišči $b = e^{\frac{2\pi i}{3}}a$ in $c = e^{\frac{4\pi i}{3}}a$. Od tod sledi $abc = ae^{\frac{2\pi i}{3}}ae^{\frac{4\pi i}{3}}a = a^3$, kar pomeni, da moramo rešiti enačbo

$$a^3 = 8i.$$

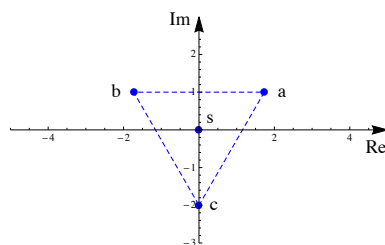
Z izračunom v polarni obliki dobimo rešitve:

$$a_1 = \sqrt{3} + i,$$

$$a_2 = -\sqrt{3} + i,$$

$$a_3 = -2i.$$

Ko izračunamo še točki b in c , vidimo, da dobimo v vseh treh primerih isti enakostranični trikotnik, le s ciklično permutiranimi oglišči.



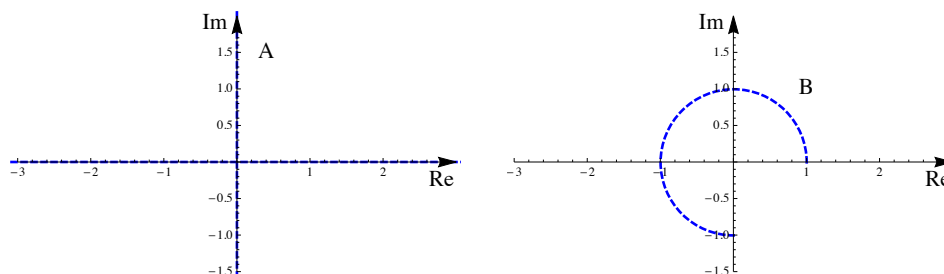
□

- [8] Po 4 točke za izračun koordinat oglišč b in c .
- [4] Izpeljava enačbe $a^3 = 8i$.
- [8] Izračun oglišč trikotnika.

(5) Skiciraj naslednji množici in pokaži, da sta ekvipolentni:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = 0\}, \quad B = \{e^{it} \mid t \in [0, \frac{3\pi}{2}]\}.$$

Rešitev: Množica A je unija koordinatnih osi, množica B pa krožni lok na enotski krožnici v \mathbb{C} , ki ustreza kotom $\phi \in [0, \frac{3\pi}{2}]$.



Za dokaz ekvipolence bomo konstruirali injektivni preslikavi $i : A \rightarrow B$ in $j : B \rightarrow A$. Za predpis preslikave j lahko vzamemo kar

$$j(e^{it}) = t.$$

Ta preslikava krožni lok zravnava in ga preslika na daljico med točkama 0 in $\frac{3\pi}{2}$.

Preslikavo i pa lahko konstruiramo na naslednji način. Realno os bomo preslikali na zgornjo polkrožnico, imaginarno os brez izhodišča pa v lok, ki ustreza kotom $\phi \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$. Njen predpis je na primer

$$i(x + iy) = \begin{cases} e^{i(\arctan x + \frac{\pi}{2})} & ; \quad y = 0, \\ e^{i(\frac{1}{2} \arctan y + \frac{5\pi}{4})} & ; \quad x = 0, y \neq 0. \end{cases}$$

□

- [3] Skici množic A in B .
- [2] Predpis preslikave j .
- [5] Predpis preslikave i .

(6) Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je podano z rekurzivnim predpisom

$$a_{n+2} = \frac{5}{2}a_{n+1} - a_n$$

za $n \in \mathbb{N}_0$ in z začetno vrednostjo $a_0 = 1$. Za katere vrednosti $a_1 \in \mathbb{R}$ je dano zaporedje konvergentno?

Rešitev: Najprej bomo izračunali splošni člen zaporedja. Pridružena karakteristična enačba

$$q^2 = \frac{5}{2}q - 1$$

ima ničli $q_1 = \frac{1}{2}$ in $q_2 = 2$. Od tod sledi

$$a_n = C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot 2^n.$$

Če hočemo, da bo zaporedje (a_n) konvergentno, mora biti $C_2 = 0$. Od tod pa potem sledi, $a_0 = 1 = C_1$ in posledično $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ in

$$a_1 = \frac{1}{2}.$$

□

· [5] Izračun splošnega člena.

· [5] Izračun $a_1 = \frac{1}{2}$.

(7) (a) Dokaži, da obstaja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \right).$$

Pomoč: Za vsak $x > 0$ velja $\ln(1+x) < x$.

(b) Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih števil, ki za vsak $n \in \mathbb{N}$ zadošča pogoju

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{2^n}$$

in za katerega zaporedje $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne konvergira k 1. Dokaži, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Rešitev: (a) Označimo

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

Po definiciji je $b_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) b_{n-1} > b_{n-1}$, kar pomeni, da je zaporedje (b_n) naraščajoče. Da pokažemo, da je konvergentno, je torej dovolj pokazati, da je navzgor omejeno. Če člene logaritmiramo in uporabimo neenakost $\ln(1+x) < x$, dobimo

$$\ln(b_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 1.$$

Od tod pa sledi, da je zaporedje (b_n) navzgor omejeno z e . Torej je konvergentno, njegovo limito pa označimo z b .

(b) Ker zaporedje $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ ne konvergira k 1, obstaja $t > 0$, da leži neskončno členov zaporedja $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ izven intervala $(1-t, 1+t)$. Po predpostavki je le končno členov večjih od $1+t$, zato mora biti neskončno členov manjših od števila $1-t$, ki ga označimo s q . Sedaj lahko pišemo

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1.$$

V izrazu na desni lahko nekatere člene navzgor ocenimo s q . Denimo, da je takšnih členov $f(n) \leq n$. Preostale člene lahko navzgor ocenimo z $1 + \frac{1}{2^k}$, zmnožijo pa se v število, ki je manjše od b_n in posledično od b . Tako pridemo do ocene

$$0 \leq a_n \leq q^{f(n)} b a_1.$$

Omenili smo že, da gre pri $n \rightarrow \infty$ tudi $f(n) \rightarrow \infty$, od koder sledi, da desna stran konvergira proti 0. Po izreku o sendviču torej tudi zaporedje (a_n) konvergira proti 0. \square

- [2] Opazka, da je zaporedje (b_n) naraščajoče.
- [6] Dokaz, da je zaporedje (b_n) navzgor omejeno.
- [2] Sklep, da je zaporedje (b_n) konvergentno.
- [5] Opazka, da za neskončno členov velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$.
- [5] Dokaz, da zaporedje (a_n) konvergira k 0.