

Rešitve 3. in 4. kolokvija iz Analize 1

(4) Ugotovi, za katera realna števila a konvergira posplošeni integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^a + x^{a+2}} dx.$$

Rešitev: Obravnavati moramo konvergenco integrala pri $x \rightarrow 0$ in pri $x \rightarrow \infty$.

$x \rightarrow 0$: Integrand lahko zapišemo v obliki

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a + x^{a+2}} = \frac{1 - e^{-x}}{x^a(1 + x^2)}.$$

Če je $a \leq 0$, je integrand zagotovo zvezen v $x = 0$, zato ni problema s konvergenco. V primeru, ko je $a > 0$, pa imamo v točki $x = 0$ potencialni pol, upoštevati pa moramo še, da ima števec $1 - e^{-x}$ v $x = 0$ ničlo stopnje 1. To naredimo formalno tako, da zapišemo

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a(1 + x^2)} = \frac{\frac{1 - e^{-x}}{x(1 + x^2)}}{x^{a-1}}.$$

Funkcija $g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x(1 + x^2)}$ ima limito $L = 1$ v točki $x = 0$, zato integral konvergira v okolici točke $x = 0$ natanko takrat, ko je $a - 1 < 1$ oziroma $a < 2$.

$x \rightarrow \infty$: Sedaj lahko zapišemo

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a(1 + x^2)} = \frac{\frac{x^2(1 - e^{-x})}{1 + x^2}}{x^{a+2}}.$$

Funkcija $g(x) = \frac{x^2(1 - e^{-x})}{1 + x^2}$ ima limito $L = 1$ pri $x \rightarrow \infty$, zato integral konvergira pri $x \rightarrow \infty$ natanko takrat, ko je $a + 2 > 1$ oziroma $a > -1$.

Dani integral torej konvergira za $a \in (-1, 2)$. □

- [4] Obravnava konvergence pri $x \rightarrow 0$.
- [4] Obravnava konvergence pri $x \rightarrow \infty$.
- [2] Rezultat.

(5) Dana je funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sin x + 1)^n}{2^n}.$$

a) Določi območje konvergence D dane funkcijske vrste in nato izračunaj njeno vsoto.

b) Ali vrsta enakomerno konvergira na D ?

Rešitev: a) Z uporabo kvocientnega kriterija dobimo

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)|\sin x + 1|^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{n|\sin x + 1|^n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|\sin x + 1|}{2n} = \frac{|\sin x + 1|}{2}.$$

Od tod sledi, da dana vrsta absolutno konvergira, če je $|\sin x + 1| < 2$, kar pa je res za vse $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Če je x oblike $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, je $\sin x + 1 = 2$ in v tem primeru dobimo divergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Območje konvergence je torej

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Za izračun vsote vrste bomo z uvedbo nove spremenljivke $t = \sin x + 1$ dano vrsto prevedli na potenčno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sin x + 1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n}{2^n} = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{2^n}.$$

Če označimo

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{2^n},$$

dobimo z integracijo po členih

$$\int f(t) dt = 1 + \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{2}{2 - t}.$$

Z odvajanjem dobimo

$$f(t) = \left(\frac{2}{2 - t} \right)' = \frac{2}{(2 - t)^2}$$

in nato še vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sin x + 1)^n}{2^n} = \frac{2t}{(2 - t)^2} = \frac{2(\sin x + 1)}{(1 - \sin x)^2}.$$

b) Vsota vrste je neomejena na D , vse delne vsote pa so omejene. Zato konvergenca ne more biti enakomerna. \square

- [6] Izračun območja konvergence.
- [8] Izračun vsote vrste.
- [6] Dokaz, da konvergenca ni enakomerna.

- (6) Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija in $x \in \mathbb{R}$. Pokaži, da za vsak $h > 0$ obstaja $t \in (x - h, x + h)$, da velja

$$f''(t) = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}.$$

Rešitev: Ker je funkcija f dvakrat zvezno odvedljiva, po Taylorjevem izreku obstajata $t_1 \in (x - h, x)$ in $t_2 \in (x, x + h)$, da velja:

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(t_2)h^2, \\ f(x - h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(t_1)h^2. \end{aligned}$$

Če ti enačbi seštejemo, dobimo

$$f(x + h) + f(x - h) = 2f(x) + \frac{1}{2}h^2(f''(t_1) + f''(t_2)),$$

kar lahko prepišemo v obliko

$$\frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = \frac{1}{2}(f''(t_1) + f''(t_2)).$$

Ker je funkcija f'' zvezna na intervalu $[t_1, t_2]$, zavzame vse vrednosti med vrednostima v krajiščih, torej tudi povprečno vrednost. Torej obstaja $t \in [t_1, t_2] \subset (x - h, x + h)$, za katerega velja $f''(t) = \frac{1}{2}(f''(t_1) + f''(t_2))$. \square

- [5] Uporaba Taylorjevega izreka.
- [5] Dokaz obstoja iskane točke t .

- (7) Na množico M vseh omejenih realnih zaporedij oblike $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uvedemo metriko s predpisom

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

- a) Utemelji, da je predpis d dobro definiran in da zanj velja trikotniška neenakost.
b) Ugotovi, ali je podmnožica $A \subset M$, ki jo sestavljajo vsa konvergentna realna zaporedja, odprta oziroma zaprta v M .

Rešitev: a) Ker sta zaporedji (x_n) in (y_n) omejeni, obstajata realni števili X in Y , da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|x_n| \leq X$ in $|y_n| \leq Y$. Po trikotniški neenakosti pa dobimo od tod za vsak $n \in \mathbb{N}$ oceno

$$|x_n - y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq X + Y.$$

Množica $\{|x_n - y_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ je torej navzgor omejena, zato obstaja njen supremum.

Sedaj bomo pokazali, da za poljubna zaporedja $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ in $z = (z_n)$ velja

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Najprej imamo za poljuben $n \in \mathbb{N}$ oceno

$$|x_n - z_n| = |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Število $d(x, y) + d(y, z)$ je torej zgornja meja množice $\{|x_n - z_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ in je zato kvečjemu večja od natančne zgornje meje $d(x, z)$.

b) Najprej pokažimo, da množica A ni odprta. V ta namen vzemimo ničelno zaporedje $0 = (0, 0, 0, \dots) \in A$ in poljuben $R > 0$. V odprti krogli $K(0, R)$ je potem zaporedje $x_n = (-1)^n \frac{R}{2}$, ki ni konvergentno. To pomeni, da ničelno zaporedje ni notranja točka A in posledično množica A ni odprta.

Za konec bomo pokazali, da je A zaprta množica. V ta namen bomo vzeli poljubno zaporedje x , ki leži na robu množice A in pokazali, da je $x \in A$. Ker je x robna točka množice A , lahko za poljuben $\epsilon > 0$ najdemo neko konvergentno zaporedje $y \in K(x, \frac{\epsilon}{3})$. Ker je zaporedje y Cauchyjevo, obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n, m \geq N$ velja $|y_n - y_m| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Za $n, m \geq N$ pa potem velja tudi ocena

$$|x_n - x_m| = |x_n - y_n + y_n - y_m + y_m - x_m| \leq |x_n - y_n| + |y_n - y_m| + |y_m - x_m| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Prva in zadnja ocena sledita iz pogoja $d(x, y) < \frac{\epsilon}{3}$. Ker je bil ϵ poljuben, je torej zaporedje x Cauchyjevo in zato konvergentno. \square

- [3] Dokaz, da je d dobro definirana.
- [3] Dokaz, da d zadošča trikotniški neenakosti.
- [3] Dokaz, da A ni odprta.
- [6] Dokaz, da je A zaprta.