

Analiza 1

3. in 4. kolokvij

2. 6. 2020

1. naloga (20 točk)

P Obstajajo kompleksna števila a , b in c , za katera je $|a - b| = 2$, $|b - c| = 3$ in $|c - a| = 4$.

N Za poljubno zvezno funkcijo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ obstaja takšna točka $t \in (a, b)$, da je f odvedljiva v t in da velja $f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

P Krožnica $x^2 + y^2 = 1$ in krivulja, podana v polarnih koordinatah s $r(\phi) = \cos \phi$ za $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se sekata v natanko eni točki.

N Obstajata konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, za kateri je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergentna.

N Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = \sin(x^2)$, je enakomerno zvezna na \mathbb{R} .

N Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Potem je funkcija $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, odvedljiva.

P Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, za katero je $f(0) = 0$. Potem ima funkcija $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ limito v točki $x = 0$.

P Obstaja funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je hkrati liha in soda.

P V metričnem prostoru (M, d) je presek poljubne družine zaprtih podmnožic spet zaprta podmnožica.

N Naj bosta A in B Dedekindova reza. Potem je tudi množica $C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ Dedekindov rez.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (10 točk)

Poišči vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbo

$$|z^4 - i| = |z^4 + i|.$$

Rešitev: Število z^4 mora biti enako oddaljeno od i in $-i$, torej mora biti realno. Poleg $z = 0$ temu pogoju zadoščajo tudi vsa števila, za katera velja

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

Točkovnik:

+4 Sklep, da je z^4 realno.

+6 Določitev vseh rešitev.

3. naloga (15 točk)

Dokaži, da obstaja parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, pri katerem je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1, \\ (x - \alpha) \ln \frac{1}{x}, & x \geq 1, \end{cases}$$

zvezno odvedljiva. V tem primeru določi njeno zalogo vrednosti Z_f in utemelji, zakaj je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow Z_f$ obrnljiva. Izračunaj $(f^{-1})'(1 - e)$.

Rešitev: Velja:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}, \quad x < 1,$$

$$f'(x) = \ln \frac{1}{x} - \frac{x(x-\alpha)}{x^2}, \quad x > 1.$$

Sedaj določimo limiti, ko $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \searrow 1} f'(x) = 0 = \alpha - 1 = \lim_{x \nearrow 1} f'(x).$$

Iskana vrednost je torej $\alpha = 1$. Nadalje velja

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

Ker gre za zlepek dveh strogo padajočih predpisov, je funkcija injektivna in $Z_f = (-\infty, 1)$. Nazadnje ugotovimo, da je $f(x) = 1 - e$ za $x = e$. Torej je

$$(f^{-1})'(1 - e) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{e}{1 - 2e}.$$

Točkovnik:

+5 Določitev parametra α .

+5 Določitev Z_f in utemeljitev obrnljivosti.

+5 Izračun odvoda.

4. naloga (15 točk)

Podan je integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x \, dx.$$

- a) Določi vse vrednosti parametra $\alpha > 0$, za katere dani integral konvergira.
- b) Izračunaj integral I v primeru, ko je $\alpha = \frac{1}{2}$.

Rešitev: Integrand ima težavo zaradi pola v $x = \frac{\pi}{2}$. Preoblikujemo ga v

$$\operatorname{tg}^{\alpha} x = \frac{\sin^{\alpha} x}{\cos^{\alpha} x} = \frac{\sin^{\alpha} x}{\sin^{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{\alpha} \sin^{\alpha} x}{\sin^{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{g(x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{\alpha}}.$$

Ker je $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 1$, je integral konvergenten za $\alpha < 1$ in divergenten sicer. Do enakega sklepa lahko pridemo z uvedbo substitucije $x = \arctan u$, saj dobimo

$$I = \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha}}{1 + u^2} du \implies \frac{u^{\alpha}}{1 + u^2} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{u^2} + 1}}{u^{2-\alpha}} = \frac{g(u)}{u^{2-\alpha}}.$$

Znova opazimo, da mora biti $2 - \alpha > 1$, da integral konvergira pri $u = \infty$.

Pri $\alpha = \frac{1}{2}$ uvedemo $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ in dobimo integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{2t^2}{1 + t^4} dt = \int_0^{\infty} \frac{2t^2}{(1 + \sqrt{2}t + t^2)(1 - \sqrt{2}t + t^2)} dt.$$

Slednjega rešimo s postopki za racionalne funkcije in dobimo $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Točkovnik:

- +5 Obravnava konvergence.
- +5 Substitucija.
- +5 Integral racionalne funkcije.

5. naloga (10 točk)

Funkcija $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = (x - 1)\sqrt{x + 1}.$$

Razvij funkcijo f v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. Nato izračunaj odvod $f^{(10)}(0)$.

Rešitev: Velja

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n.$$

Torej je razvoj enak

$$f(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{\frac{1}{2}}{n-1} - \binom{\frac{1}{2}}{n} \right] x^n.$$

Pri $n = 10$ dobimo

$$f^{(10)}(0) = 10! \cdot \left[\binom{\frac{1}{2}}{9} - \binom{\frac{1}{2}}{10} \right].$$

Točkovnik:

+5 Razvoj f .

+5 Določitev odvoda.

6. naloga (15 točk)

- a) Naj bosta $f_n, g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zaporedji zveznih funkcij, ki na $[0, 1]$ enakomerno konvergirata k f oziroma g . Pokaži, da je potem zaporedje $f_n g_n$ enakomerno konvergentno na $[0, 1]$.
- b) Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n \cos\left(\frac{x}{n}\right)}{n + x^2} dx.$$

Rešitev: Naj bosta $\epsilon_f > 0$ in $\epsilon_g > 0$. Vemo, da obstajata $n_f \in \mathbb{N}$ in $n_g \in \mathbb{N}$, da velja

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon_f, \quad n \geq n_f, \quad x \in [0, 1],$$

$$|g_n(x) - g(x)| < \epsilon_g, \quad n \geq n_g, \quad x \in [0, 1].$$

Sedaj ocenimo

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x)|\epsilon_g + |g(x)|\epsilon_f.$$

Ker gre za zaporedje zveznih funkcij, ki konvergira enakomerno, je g zvezna na zaprtem intervalu. Torej obstaja $M_g > 0$, da je $|g(x)| < M_g$. Podobno velja, da je

$$|f_n(x)| < |f(x)| + \epsilon_f < M_f + \epsilon_f < 2M_f,$$

pri čemer smo predpostavili, da je $\epsilon_f < M_f$. Če torej izberemo

$$\epsilon_f < \min \left\{ \frac{\epsilon}{2M_g}, M_f \right\}, \quad \epsilon_g < \frac{\epsilon}{4M_f}, \quad n \geq \max \{n_f, n_g\},$$

bo veljalo

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| < \epsilon, \quad x \in [0, 1].$$

V točki b) imamo dve enakomerno konvergentni zaporedji

$$f_n(x) = \frac{n}{n + x^2} \rightarrow 1, \quad g_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) \rightarrow 1.$$

Ker lahko pri enakomerno konvergentnih zaporedjih zamenjamo vrstni red integracije in limite torej velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n \cos\left(\frac{x}{n}\right)}{n + x^2} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos\left(\frac{x}{n}\right)}{n + x^2} dx = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Točkovnik:

+7 Dokaz enakomerne konvergence.

+8 Izračun limite oz. integrala.

7. naloga (15 točk)

Naj bo $M = [0, 1)$. Element $x \in M$ podamo v dvojiškem zapisu $x = 0.x_1x_2x_3\dots$, v katerem se ne ponavljajo enice od nekega dalje. Nato definiramo metriko $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$d(x, y) = \begin{cases} 2^{-k}, & k = \min \{n : x_n \neq y_n\}, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

- a) Pokaži, da za poljubni odprti krogli prostora (M, d) velja, da sta bodisi disjunktni bodisi je ena podmnožica druge.
- b) Ali je množica $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ kompaktna v (M, d) ?

Rešitev: Naj bo $x = 0.x_1x_2\dots \in K(a, r) \cap K(b, r')$. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $r' \leq r < \frac{1}{2^k}$ ter da je $k \in \mathbb{N}_0$ najmanjše tako število. Tedaj sta a in b oblike

$$a = 0.x_1x_2\dots x_k a_{k+1} a_{k+2} \dots,$$

$$b = 0.x_1x_2\dots x_k b_{k+1} b_{k+2} \dots$$

To pomeni, da za vsak $c \in K(b, r')$ velja, da je oblike

$$c = 0.x_1x_2\dots x_k c_{k+1} c_{k+2} \dots \Rightarrow c \in K(a, r) \Rightarrow K(b, r') \subset K(a, r).$$

Množica $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ni kompaktna, saj obstaja neskončno odprto pokritje

$$A \subset K(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \cup K(\frac{5}{8}, \frac{1}{16}) \cup K(\frac{11}{16}, \frac{1}{32}) \dots = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right) \cup \left[\frac{5}{8}, \frac{11}{16}\right) \cup \left[\frac{11}{16}, \frac{23}{32}\right) \cup \dots$$

Točkovnik:

+8 Točka a).

+7 Točka b).