

## Analiza 1: 1. kolokvij

5. 12. 2019

### 1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Vsako Cauchyjevo zaporedje realnih števil je omejeno.



Zaporedje realnih števil s predpisom  $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{n}$  je konvergentno.



Podmnožica realnih števil  $A = \{\sin(\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}$  ima natančno zgornjo mejo.



Če je  $A$  neskončna množica in  $B \subset A$  neskončna podmnožica, obstaja injektivna preslikava  $i : A \rightarrow B$ .



Množici  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{R}$  sta ekvipolentni.



Naj bo  $A$  Dedekindov rez, ki predstavlja število  $x$ . Množica  $-A = \{-a \mid a \in A\}$  je potem Dedekindov rez, ki predstavlja število  $-x$ .



Število  $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{2019}$  je realno.



Če je realno število  $x > 0$  iracionalno, je za vsak  $n \in \mathbb{N}$  iracionalno tudi število  $\sqrt[n]{x}$ .



Obstaja kompleksno število  $z$ , za katerega velja  $|z - 1 + 2i| = 2$  in  $|z + 2| = 1$ .



Obstaja zaporedje realnih števil, ki ima za stekališča natanko vsa naravna števila.

## 2. naloga (10 točk)

Liho število otrok (predpostavimo, da so vsaj trije) se razporedi po travniku, tako da razdalja med nobenima dvema otrokoma ni enaka. Na znak vsak vzame svoj vodni balon in ga vrže v osebo, ki mu je najbližje in jo zadene ter zmoči. Z indukcijo dokaži, da vsaj ena oseba ostane suha. (Namig: Kaj se zgodi z dvojico, ki si je najbližje?)

## 3. naloga (10 točk)

Dana je podmnožica realnih števil

$$A = \left\{ \frac{m^2 - 4}{m^2 - 2} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Poišči tiste izmed  $\min A$ ,  $\max A$ ,  $\inf A$  in  $\sup A$ , ki obstajajo.

## 4. naloga (20 točk)

Naj bodo  $a, b, c \in \mathbb{C}$  oglišča enakostraničnega trikotnika v kompleksni ravnini in  $s$  njegovo težišče.

- (a) Izračunaj koordinate oglišč  $b$  in  $c$ , če je  $s = 1 + i$  in  $a = 2 + 4i$ .
- (b) Poišči vse enakostranične trikotnike, za katere je  $s = 0$  in  $abc = 8i$ .

## 5. naloga (10 točk)

Skiciraj naslednji množici in pokaži, da sta ekvipolentni:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = 0\}, \quad B = \{e^{it} \mid t \in [0, \frac{3\pi}{2}]\}.$$

## 6. naloga (10 točk)

Zaporedje  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  je podano z rekurzivnim predpisom

$$a_{n+2} = \frac{5}{2}a_{n+1} - a_n$$

za  $n \in \mathbb{N}_0$  in z začetno vrednostjo  $a_0 = 1$ . Za katere vrednosti  $a_1 \in \mathbb{R}$  je dano zaporedje konvergentno?

## 7. naloga (20 točk)

- (a) Dokaži, da obstaja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \right).$$

Pomoč: Za vsak  $x > 0$  velja  $\ln(1 + x) < x$ .

- (b) Naj bo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje pozitivnih števil, ki za vsak  $n \in \mathbb{N}$  zadošča pogoju

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{2^n}$$

in za katerega zaporedje  $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ne konvergira k 1. Dokaži, da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .