Nekaj pomembnih primerov limit zaporedij

1.) Zaporedja, katerih členi so racionalni izrazi.

Oglejmo si zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kjer je

$$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

$P(n)$ in $Q(n)$ sta polinoma v n ; $n \in \mathbb{N}$

$$P(n) = \alpha_l n^l + \alpha_{l-1} n^{l-1} + \dots + \alpha_1 n + \alpha_0$$
$$Q(n) = \beta_k n^k + \beta_{k-1} n^{k-1} + \dots + \beta_1 n + \beta_0$$

Zanima nas konvergenca zaporedij oblike:

$$a_n = \frac{\alpha_l n^l + \alpha_{l-1} n^{l-1} + \dots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_k n^k + \beta_{k-1} b^{k-1} + \dots + \beta_1 n + \beta_0}.$$

Najprej je smiselno izraz za a_n nekoliko "okrajšati". Števec in imenovalec bomo delili z n^k. Dobimo:

$$a_n = \frac{\alpha_l n^{l-k} + \alpha_{l-1} n^{l-1-k} + \dots + \alpha_1 n^{1-k} + \alpha_0 n^{-k}}{\beta_k + \beta_{k-1} n^{-1} + \dots + \beta_1 n^{1-k} + \beta_0 n^{-k}}$$

$\beta_{k-2} n^{-2} = \frac{\beta_{k-2}}{n^2}$

$$= \frac{\alpha_l n^{l-k}}{\beta_k + \dots + \beta_0 n^{-k}} + \frac{\alpha_{l-1} n^{l-1-k}}{\beta_k + \dots + \beta_0 n^{-k}} + \dots \frac{\alpha_0 n^{-k}}{\beta_k + \dots + \beta_0 n^{-k}}$$

Oglejmo si pri člen v vsoti: Imamo tri možnosti:

1) $l - k > 0$

2) $l - k = 0$

3) $l - k < 0$

1.) V tem primeru zaporedje divergira.

$l - k = r > 0$.

$$a_n = \frac{\alpha_l n^r}{\beta_k + \frac{\beta_{k-1}}{n} + \frac{\beta_{k-2}}{n^2} + \dots + \frac{\beta_0}{n^k}} +$$

$$\frac{\alpha_{l-1} n^{r-1}}{\beta_k + \frac{\beta_{k-1}}{n} + \frac{\beta_{k-2}}{n^2} + \dots + \frac{\beta_0}{n^k}} + \dots$$

Oglejmo si pri člen v vrsti;

$$\frac{\alpha\, n^r}{\beta_k + \frac{\beta_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{\beta_0}{n^k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{"}\ \frac{\alpha\, n^r}{\beta_k}\ \text{"}$$

$r=2;\quad 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots \longrightarrow \infty$

Torej

$$\frac{\alpha\, n^r}{\beta_k + \ldots + \frac{\beta_0}{n^k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$$

Zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pri katerem je $l>k$ torej divergira.

Še lepše se to vidi, če a_n "krajšamo" z n^l.

$$a_n = \frac{\alpha_l + \alpha_{l-1}\frac{1}{n} + \ldots + \alpha_0 \frac{1}{n^l}}{\beta_k n^{k-l} + \beta_{k-1} n^{k-l-1} + \ldots + \beta_0 n^{-l}} \qquad k-l<0$$

$$\text{"}\ \beta_k n^{-r}\ ; \ r>0 \qquad \frac{\beta_k}{n^r} \longrightarrow 0$$

Torej imamo:

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha_\ell}{0} = \pm \infty$$

3.) Stopnja imenovalca je višja od stopnje števca $k > \ell$.

Zgoraj in spodaj spet delimo z n^ℓ

$$a_n = \frac{\alpha_\ell n^\ell + \alpha_{\ell-1} n^{\ell-1} + \dots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_k n^k + \dots + \beta_1 n + \beta_0} =$$

$$= \frac{\alpha_\ell + \frac{\alpha_{\ell-1}}{n} + \dots + \frac{\alpha_1}{n^{\ell-1}} + \frac{\alpha_0}{n^\ell}}{\beta_k n^{k-\ell} + \dots + \beta_{k-\ell} n^0 + \beta_1 n^{1-\ell} + \frac{\beta_0}{n^\ell}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha_\ell}{\infty} = 0$$

Torej: Če je $k > \ell$ zaporedje konvergira in velja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

2.) $k = l$

$$a_n = \frac{\alpha_l n^l + \alpha_{l-1} n^{l-1} + \dots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_l n^l + \beta_{l-1} n^{l-1} + \dots + \beta_1 n + \beta_0} =$$

$$= \frac{\alpha_l + \alpha_{l-1}\frac{1}{n} + \alpha_{l-2}\frac{1}{n^2} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{n^{l-1}} + \alpha_0 \frac{1}{n^l}}{\beta_l + \beta_{l-1}\frac{1}{n} + \beta_{l-2}\frac{1}{n^2} + \dots + \beta_1 \frac{1}{n^{l-1}} + \beta_0 \frac{1}{n^l}}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\alpha_l}{\beta_l}$$

Vidimo torej: Če sta v $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$

$P(n)$ in $Q(n)$ polinoma iste stopnje, potem

zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira in velja:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\alpha_l}{\beta_l}$$ kvocient vodilnih koeficientov.

2.) Zaporedje oblike

$$a_n = \frac{n}{q^n} \quad ; \quad q > 1$$

Naš načrt. Najprej bomo dokazali, da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pada. Ker so vsi členi pozitivni, je omejeno. Torej je po dokazanem izreku konvergentno. Nazadnje bomo ugotovili še vrednost limite.

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}} = \frac{n+1}{n}\,\frac{n}{q^n}\,\frac{1}{q} = \frac{n+1}{nq}\cdot\underbrace{\frac{n}{q^n}}_{=a_n}$$

Torej:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{nq}\cdot a_n$$

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{q}\,a_n$$

Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_ε, tako da je $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, Torej, za $n > n_\varepsilon$ je

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \varepsilon$$

Spomnimo se: $q > 1$. Gotovo obstaja $\varepsilon > 0$

$\ni$:

$$1 + \varepsilon < q$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) < (1 + \varepsilon) < q \quad (\text{če je } n > n_\varepsilon)$$

Torej, za dovolj velike n ($n > n_\varepsilon$) imamo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{q} < 1 .$$

Spomnimo se

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{q} \; a_n$$

Za $n > n_\varepsilon$ dobimo:

$$a_{n+1} < a_n \qquad \text{za } n > n_\varepsilon$$

Zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ od n_0 naprej pada.

Torej vemo, da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ obstaja.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

Vemo $A \geq 0$.

Seveda velja:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A$$

Videli smo:

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}\cdot a_n$$

Ker limite na levi in na desni obstajejo, lahko zapišemo:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}_{=A} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{=1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{=A}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot A$$

Če je $q > 1$ $(q \neq 1)$, je edino število, ki reši zgornjo enačbo: $A = 0$.

Torej, dokazali smo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{q^n} = 0$$

3.) Zaporedje $a_n = \sqrt[n]{n}$

<u>Trditev:</u>

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = \underline{1}$$

<u>Dokaz:</u> Videli smo: Zaporedje $\left\{\frac{n}{q^n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ je od nekje naprej padajoče. Torej: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$ $\ni$:

$$n > N; \quad 1 \leq n < (1+\varepsilon)^n$$

Res: $\underset{(=q)}{\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}} < \underline{1} \Rightarrow n < (1+\varepsilon)^n$

$\frac{n}{q^n} = \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1$ od nekod naprej, kar je, ker smo dokazali, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$.

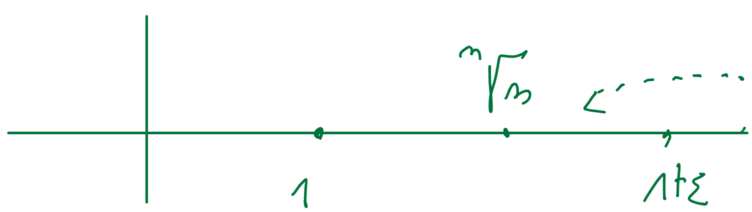
Torej, še enkrat:

$$1 \leq n < (1+\varepsilon)^n \quad ; \quad n > N$$

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{(1+\varepsilon)^n}$$

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < (1+\varepsilon)$$

Naš $\varepsilon > 0$ pa je lahko poljubno majhen.



Torej res velja:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

4.) Zaporedje $a_n = \sqrt[n]{a}$

Trdimo: Zaporedje konvergira in velja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

<u>Dokaz:</u> Naj bo najprej $a > 1$.

Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N_\varepsilon \ni$:

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow 1 < a < (1+\varepsilon)^n \quad / \sqrt[n]{}$$

T.j.:

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{(1+\varepsilon)^n}$$

$$1 < \sqrt[n]{a} < (1+\varepsilon)$$

Sklep: ker je $\varepsilon > 0$ poljubno majhen, smo dokazali, da limita obstaja in da velja:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

5.) Zaporedje $a_n = \frac{q^n}{n!}$

Velja: $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$

(za vsako realno število q)

D. N. Dokažite zgornjo trditev.

$\left| 0 - \frac{q^n}{n!} \right| < \varepsilon$

$0 \leq \frac{|q|^n}{n!} < \varepsilon$

6.) Zaporedje $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Pomembno: Dokazali bomo

<u>Izrek:</u> Zaporedje $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno.

(Tj. obstaja $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$)

Definicija: Eulerjevo število e je podano s predpisom:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dokaz izreka: Konvergenco bomo dokazali s pomočjo Bernoullijeve neenakosti:

Bernoullijeva neenakost: Za $n \in \mathbb{N}$ in za vsak $\alpha > -1$ velja:

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$