

NALOGA: NAJ BO  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

(a) DOKAŽI, DA TEDAJ VELJA TUDI

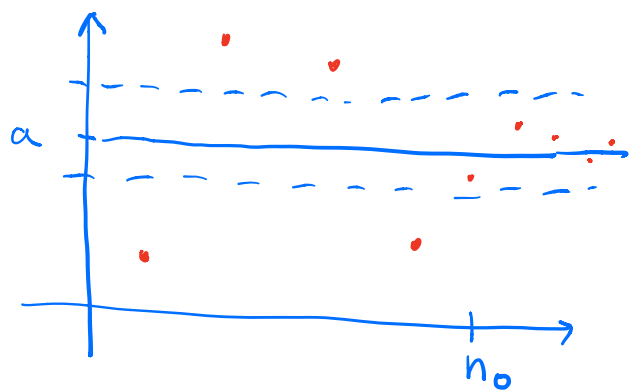
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) = a.$$

(b) NAJ DODATNO VELJA, DA  $a_n > 0$  IN  $a > 0$ . DOKAŽI, DA TEDAJ VELJA TUDI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = a.$$

(c) S PROTIPRIMEROM POKAŽI, DA OBRAT TEH TRDITEV NE VELJA.

REŠITEV: (a) NAJ BO  $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ .



NAIVNO:

$$a_n \approx a, \quad n \geq n_0.$$

$$A_n \approx \frac{\text{FIKSNO ŠT.}}{n} + \frac{n - n_0}{n} \cdot a$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $0$   $a$

DOKAZ: IZBERIMO POLJUBEN  $\varepsilon > 0$ . IŠČEMO  $n_1 \in \mathbb{N}$ , DA ZA  $n \geq n_1$  VELJA  $|A_n - a| < \varepsilon$ .

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + \dots + a_n}{n}$$

KONVERGENTNO ZAPOREDOJE JE OMEJENO.

t.j.  $\exists M, m \in \mathbb{R}$ , DA  $m \leq a_n \leq M$ .

TOREJ VELJA:

$$A_n \leq \frac{n_0 \cdot M}{n} + \frac{n-n_0}{n} (a + \frac{\varepsilon}{2})$$

$$A_n \geq \frac{n_0 \cdot m}{n} + \frac{n-n_0}{n} (a - \frac{\varepsilon}{2})$$

KER GRE  $\frac{n_0}{n} \rightarrow 0$  IN  $\frac{n-n_0}{n} \rightarrow 1$ ,  
OBSTAJA  $n_1 \in \mathbb{N}$ , DA ZA  $n \geq n_1$  VELJA:

$$a - \varepsilon < S_n < a + \varepsilon$$

RES, POSKRBINO LAKO, DA JE

$$\frac{n_0 M}{n} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \frac{n_0 \cdot m}{n} > -\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\frac{n-n_0}{n} (a + \frac{\varepsilon}{2}) < a + \frac{3\varepsilon}{4}$$

$$\frac{n-n_0}{n} (a - \frac{\varepsilon}{2}) > a - \frac{3\varepsilon}{4}$$

D.N. NATANOV PREVERI, ZAKAJ!

(b) NAMIG: LOGARITEM.

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

$$\log G_n = \frac{1}{n} (\log a_1 + \dots + \log a_n)$$

PO TOČKI (a) VEMO, DA JE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log G_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log a_n),$$

SAJ MORA BITI LIMITA ARITMETIČNE  
SREDINE ENAKA LIMITI ZAPOREDJA.

KER JE LOGARITEM ZVEZEN, IMAMO:

$$\log \left( \lim_{n \rightarrow \infty} G_n \right) = \log \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

(C) DOKAZATI MORAMO, DA KONVERGENCA  
ENE IZMED SREDIN NE IMPLICIRA  
KONVERGENCE ZAPOREDJA  $(a_n)$ .

PROTI PRIMERU:

ZA (a):  $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

$(a_n)$  NIMA LIMITE, ČE PRAV  $A_n \rightarrow \frac{1}{2}$ .

ZA (b):  $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$

$(a_n)$  NIMA LIMITE, ČE PRAV  $G_n \rightarrow 1$ .

NALOGA: NAJ BODO ČLENI  $a_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , IN NAJ

OBSTAJA LIMITA  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ . POKAŽI,

DA TEDAJ VELJA  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ . S

POMOČJO TEGA DEJSTVA POIŠČI LIMITE:

$$a_n = \sqrt[n]{n}, \quad a_n = \frac{\ln n}{n}, \quad a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

REŠITEV: UPORABIMO (b) TOČKO PREJŠNJE  
NALOGE, KI GOVORI O GEOM. SREDINI:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow a$$

$$G_n = \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} \rightarrow a$$

KER VSE LIMITE OBSTAJAJO, VELJA TUDI:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_0}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_0}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}{1}.$$

RES, ZA  $a_0 > 0$  JE  $\sqrt[n]{a_0} = (a_0)^{\frac{1}{n}} \rightarrow (a_0)^0 = 1$ .

SEDAJ DOLOČIMO LIMITE Z UPORABO TEGA TRIKA:

LIMITA ZA  $\sqrt[n]{n}$  JE ENAKA LIMITI  $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ .

POSLEDIČNO GRE  $\frac{\ln n}{n} = \frac{1}{n} \ln n = \ln \sqrt[n]{n} \rightarrow \ln 1 = 0$

LIMITA ZA  $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$  PA JE ENAKA LIMITI

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e.$$

DEF: CAUCHYJEVA LASTNOST

ZAPOREDJE  $(a_n)$  JE CAUCHYJEVO, ČE  
ZA  $\forall \varepsilon > 0$  OBSTAJA  $n_0 \in \mathbb{N}$ , DA ZA  $n, m \geq n_0$   
VELJA:  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

t.j. DOVOLJ POZNI ČLENI SO POLJUBNO SKUPAJ.

IZREK:

ZA REALNA ZAPOREDJA VELJA:

$(a_n)$  KONVERGENTNO  $\Leftrightarrow (a_n)$  CAUCHYJEVO

OPOMBA: KASNEJE V PREDMETU BOMO VIDELI, DA  
V SPLOŠNEM VELJA LE  $(\Rightarrow)$ .

NALOGA: POKAŽI, DA JE KONVERGENTNO ZAPOREDJE:

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

REŠITEV: DOKAŽIMO, DA JE  $(a_n)$  CAUCHYJEVO.

NAJ BO  $\varepsilon > 0$ , IŠČEMO USTREZEN  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

NAJ BO  $m \geq n$ :

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\sin m}{2^m} + \frac{\sin(m-1)}{2^{m-1}} + \dots + \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \right|$$
$$\leq \frac{|\sin(m)|}{2^m} + \dots + \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

↑ TRIK. NEENAKOST

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

↑  
VŠOTA  
GEOM. VRSTE

ČE ZAGOTOVIMO,  
DA TO DRŽI ZA  
 $m, n \geq n_0$ , JE  
TO DOVOLJ.

SKLEP: USTREZEN  $n_0$  ZADOŠČA:

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \Rightarrow n_0 \cdot \log \frac{1}{2} < \log \varepsilon$$

$$n_0 > \frac{\log \varepsilon}{\log \frac{1}{2}}$$

NEGATIVNO  
ŠTEVILO  
OBRNE NEENAKOSTI.

ZANIMIVOST:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2 \sin 1}{5 - 4 \cos 1}$$