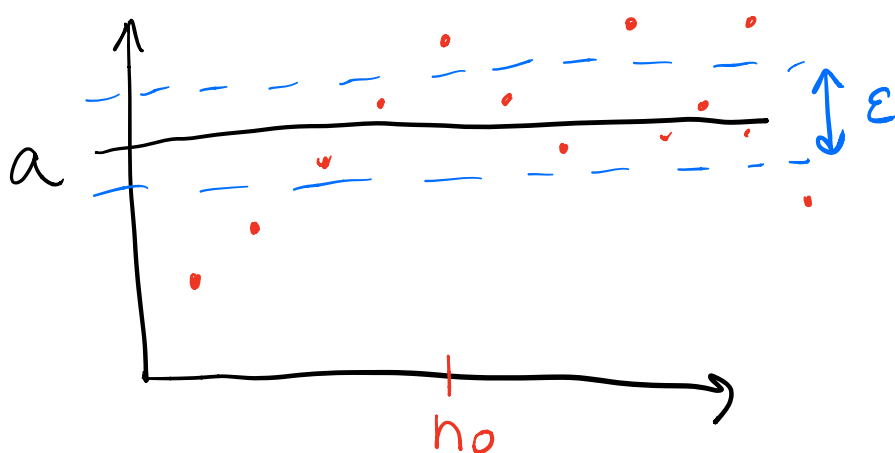


DEF:

ŠTEVILO $a \in \mathbb{R}$ JE STEKALIŠČE REALNEGA ZAPOREDJA (a_n) , ČE ZA $\forall \varepsilon > 0$ IN $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ OBSTAJA $n \geq n_0$, DA JE $|a_n - a| < \varepsilon$.



KAJ JE RAZLIKA
Z LIMITO?

V VSAKI ε -OKOLICI
JE NEŠKONČNO
ČLENOV, NISO
PA NUJNO VSİ OD
NEKEGA DALJE.

VELJA TOREJ:

- (i) LIMITA ZAPOREDJA JE TUDI STEKALIŠČE. ŠE VEČ.
- (ii) ČE JE ZAPOREDJE KONVERGENTNO, IMA NATANKO ENO STEKALIŠČE. POSLEDIČNO ZAPOREDJE Z DVEMA STEKALIŠČEMA NIKOLI NIMA LIMITE.
NPR. $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$
- (iii) OBSTAJAJO ZAPOREDJA Z ENIM STEKALIŠČEM, KI PA NISO KONVERGENTNA.
NPR. $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \dots$

NALOLA: DOLOČI STEKALIŠČA ZAPOREDIJ

$$(a) \quad a_n = 3 + (-1)^n + \frac{1}{n}$$

$$(b) \quad b_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

REŠITEV: (a) ZAPIŠIMO NEKAJ ČLENOV (a_n):

$$2 + \frac{1}{1}, 4 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, 4 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{5}, \dots$$

SUMIMO: STEKALIŠČI STA 2 IN 4.

DOKAZ: IZBERIMO $\varepsilon > 0$ IN $n_0 \in \mathbb{N}$.

IŠČENO $n \geq n_0$, DA BO $|a_n - 2| < \varepsilon$.

ZA LIHO STEVILO n VELJA:

$$|a_n - 2| = \left| 2 + \frac{1}{n} - 2 \right| = \frac{1}{n}$$

ČE TOREJ IZBEREMO LIH $n \in \mathbb{N}$, KI ZADOŠČA $n \geq n_0$ IN $n > \frac{1}{\varepsilon}$, ZANJ VELJA ŽELENA LASTNOST.

D.N. DOKAŽI ISTO ZA $a = 4$ IN $n \in \mathbb{N}$.

(b) ZAPIŠIMO NEKAJ ČLENOV ZA (b_n):

$$1 + \frac{1}{2} \cdot 0, 1 + \frac{2}{3} \cdot (-1), 1 + \frac{3}{4} \cdot 0, 1 + \frac{4}{5} \cdot (+1), \dots$$

OPAZIMO POŠAVLJAJOČI SE CIKEL $0, -1, 0, 1, \dots$

ZATO TOKRAT UPORABIMO TRDITEV:

a JE STEKALIŠČE (a_n) NATANKO TEDI,
KO JE LIMITA NEKEGA PODZAPOREDJA.

Oglejmo si tri podzaporedja (b_n):

(i) podzaporedje, kjer $n = 4k + 1$ oz. $n = 4k + 3$.

$$b_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Očitna limita tega podzaporedja je 1.

(ii) podzaporedje, kjer je $n = 4k + 2$:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos(2k\pi + \pi) \\ &= 1 - \frac{n}{n+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Zadnji sklep je res, ker iz $k \rightarrow \infty$ sledi $n \rightarrow \infty$.

(iii) podzaporedje, kjer je $n = 4k$:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{n}{n+1} \cos(2k\pi) = \\ &= 1 + \frac{n}{n+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Sklep: Stekališča so 1, 0 in 2.

NALOGA: 2 OZNAKAMA $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ IN $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

OZNAČIMO NAJVEČJE OZ. NAJMANJŠE STEKALIŠČE
ZAPOREDJA (a_n) . DOLOČI JU ZA:

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \frac{4}{n} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n}.$$

REŠITEV: OGLEDJMO SI NEKAJ ČLENOV.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$a_5 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} + \frac{5}{5} = \frac{3}{5},$$

$$a_6 = \frac{1}{6} - \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} + \frac{5}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

DOHNEVA:

$$\begin{cases} a_{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1} \\ a_{2k} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

DOKAZ:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{1}{2k+1} - \frac{2}{2k+1} + \frac{3}{2k+1} - \dots - \frac{2k}{2k+1} + \frac{2k+1}{2k+1} = \\ &= \frac{1}{2k+1} + k \cdot \frac{1}{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1}. \end{aligned}$$

$$a_{2k} = \left(\frac{1}{2k} - \frac{2}{2k} \right) + \left(\frac{3}{2k} - \frac{4}{2k} \right) + \dots + \left(\frac{2k-1}{2k} - \frac{2k}{2k} \right)$$

$$= k \cdot \left(-\frac{1}{2k} \right) = -\frac{1}{2}.$$

SKLEP: $\frac{k+1}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ } STEKALISCI.

$-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ }

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}.$$