

Integral s parametrom

Zveznost, odvod in integral integrala s parametrom

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u, v : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) \, dt$$

- u, v, f zvezne $\Rightarrow F$ zvezna
- u, v zvezno odvedljivi, f zvezna in parcialno zvezno odvedljiva po spremenljivki x
 $\Rightarrow F$ odvedljiva in velja

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt + v'(x)f(x, v(x)) - u'(x)f(x, u(x))$$

- f zvezna na $[c, d] \times [a, b] \Rightarrow$

$$\int_c^d F(x) \, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) \, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) \, dx \right) dt$$

Naloge

1. Izračunaj $F(x) = \int_0^1 |2x - 3y| \, dy$ za $x \in \mathbb{R}$.

2. Izračunaj $\frac{d}{dx} \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^{-y^2/x}}{y} \, dy$.

3. Dokaži, da je integral

$$\int_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} \frac{y^x}{\ln y} \, dy$$

neodvisen od x .

Namig: Najprej pokaži, da to velja na poltrakih $(-\infty, -1)$ in $(-1, \infty)$, nato pa s substitucijo $z = \frac{1}{y}$ pokaži še, da se vrednost na prvem poltraku ujema z vrednostjo na drugem poltraku.

4. Izračunaj $g'(x)$, kjer je $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xy)}{y} \, dy$.

Posplošeni integral

Naj bo $F(x) = \int_a^\infty f(x, t) dt$. (podobne lastnosti veljajo za druge posplošene integrale)

Weistrassov kriterij za integrale s parametri:

Če obstaja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, za katero velja $|f(x, t)| < g(t)$ za vsak $x \in I$ in $t \in [a, \infty)$ in integral $\int_a^\infty g(t) dt$ konvergira, potem F konvergira enakomerno.

Zveznost posplošenih integralov

Če je $f(x, t)$ zvezna in F konvergira enakomerno, potem je F zvezna.

Odvajanje posplošenih integralov

Naj bo $F(x) = \int_a^\infty f(x, t) dt$ za $x \in I$, I odprt interval. Če:

- $F(x)$ obstaja za neki $x \in I$
- f je parcialno odvedljiva po x , parcialni odvod f_x je zvezen v obeh spremenljivkah
- $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$ je enakomerno konvergenten: po Weistrassovem kriteriju: obstaja tak $g(t)$, da $|\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)| \leq g(t)$ za $\forall x \in I$, $t \in [a, \infty)$ in $\int_a^\infty g(t) dt$ konvergira

Potem:

- $F(x)$ obstaja za $\forall x \in I$
- $F'(x) = \int_a^\infty f_x(x, t) dt$

Integriranje posplošenih integralov

Če je f zvezna na $[c, d] \times [a, \infty)$ in F konvergira enakomerno, potem velja

$$\int_c^d F(x) dx = \int_c^d \left(\int_a^\infty f(x, t) dt \right) dx = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, t) dx \right) dt$$

Naloge

5. Določi definicijsko območje integrala $\int_0^\infty e^{a\sqrt{y}} dy$. s parametrom a .
6. Določi definicijsko območje integrala $\int_0^\infty \frac{\ln(1+ay^2)}{y^2} dy$. s parametrom a .
7. Ali je $F(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2y^2} dy$ zvezna? Kaj lahko iz tega sklepamo?
8. Izračunaj $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx$ za $a \geq 0$.
9. Za $x \in \mathbb{R}$ izračunaj integral $\int_0^\infty \frac{\arctan(xy)}{y(1+y^2)} dy$.
10. Izračunajte integral $F(a) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2} dx$ Kot znano lahko privzamete, da je integral $F(a)$ enakomerno konvergenten in da lahko odvajate pod integralskim znakom.
11. Izračunaj $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-2at}}{t} dt$ za $a > 0$.

Funkciji gama in beta

Gama:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n!$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Beta:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\beta(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

$$\beta(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \varphi \cdot \sin^{2y-1} \varphi d\varphi$$

Naloge

12. Izračunaj $\int_0^{\infty} x^7 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

13. Izračunaj $\int_0^1 (\ln x)^4 \cdot \sqrt{-\ln x} dx$.

14. Izračunaj $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \sqrt{\ln x} dx$.

15. Izračunaj $\int_0^1 \sqrt{(\ln \frac{1}{t})^3} dx$.

16. Izračunaj $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$.

17. Izrazi $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx$ z beta funkcijo.

18. Izračunaj $\int_0^4 x^3 (16-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$.

19. Izračunaj $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$.

20. Izračunaj $\int_0^{\infty} \frac{x^5}{1+x^{12}} dx$.

Rešitve

1

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - 2x; & x \leq 0, \\ \frac{4}{3}x^2 - 2x + \frac{3}{2}; & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 2x - \frac{3}{2}; & \frac{3}{2} \leq x. \end{cases}$$

2 $F'(x) = -1/2xe^x$

3 $F'(x) = 0$ za $x \neq 0$ in $F(x) = F(-x - 2)$

4

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x}; & x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}; & x = 0. \end{cases}$$

5 $(-\infty, 0)$

6 $[0, \infty)$

7 $f(x, t)$ je zvezna, $F(x)$ ni zvezna. Iz tega lahko sklepamo, da F ne konvergira enakomerno.

8 $-1/2(1+a)^{-2}$

9 $\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \ln(1 + |x|)$

10 $F(a) = 2\pi \ln(|a| + 1)$

11 $\ln 2$

12 48

13 $\frac{945}{32}\sqrt{\pi}$

14 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

15 $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

16 $\frac{\pi}{8}$

17 $\frac{1}{3}\beta(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

18 $\frac{2^{11}}{15}$

19 $\frac{1}{24}$

20 $\frac{\pi}{12}$