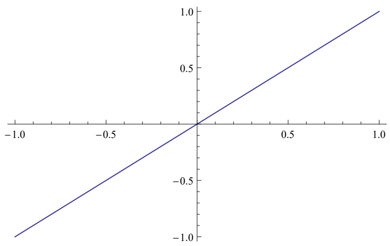
Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija. Dokaži, da obstajata soda funkcija f_s in liha funkcija f_l, da velja $f = f_s + f_l$.

Funkciji $f_s(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ in $f_l(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ zadoščata pogojem.

Določi definicijsko območje in skiciraj graf funkcij $\sin(\arcsin(x))$ in $\arcsin(\sin(x))$.

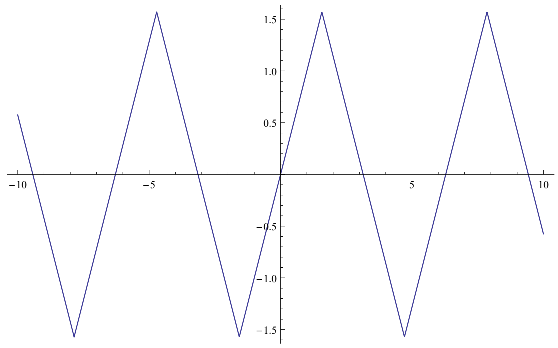
Definicijsko območje kompozituma dveh funkcij $g \circ f$ je enako $\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.
Definicijsko območje funkcije arcsin je enako $[-1, 1]$, def. območje funkcije sin pa je $\mathbb{R}$. Sklepamo, da je definicijsko območje $\sin(\arcsin(x))$ enako $[-1, 1]$, definicijsko območje funkcije $\arcsin(\sin(x))$ pa je kar $\mathbb{R}$ (upoštevamo, da je $[-1, 1]$ zaloga vrednosti funkcije sin).
Za vsak $x \in [-1, 1]$ je funckija arcsin inverzna funkcija funkcije sin, torej velja $\arcsin(x) = a \Leftrightarrow \sin(a) = x$. Iz tega sledi, da je $\sin(\arcsin(x)) = x$ za vsak $x \in [-1, 1]$.



Prav tako lahko sklepamo, da velja $\arcsin(\sin(x)) = x$ za vse $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, saj je za $\arcsin(a) = x \Leftrightarrow \sin(x) = a$ za vsak $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Če upoštevamo, da je funkcija sin periodična s periodo 2π, lahko sklepamo, da je $\arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin(x))$ za vse x, torej vemo, kako igleda graf funkcije na intervalih $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$.
Da izračunamo vrednost $\arcsin(\sin(x))$ za preostale x, upoštevamo, da velja $\sin(x) = -\sin(x + \pi)$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Če upoštevamo, da je arcsin liha funkcija (res, saj je inverzna funkcija of funkcije sin), lahko izračunamo enakost

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(-\sin(x + \pi)) = -\arcsin(\sin(x + \pi)),$$

in ker za $x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ velja $x + \pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, velja za $x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ enakost $\arcsin(\sin(x)) - \arcsin(\sin(x + \pi)) = -(x + \pi)$. Sedaj, če spet upoštevamo periodičnost funkcije sin, poznamo vrednosti funckije $\arcsin(\sin(x))$ za vse $x \in \mathbb{R}$.



Dokaži, da je vsaka monotona soda funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstantna!

Dokaz za primer, ko je f naraščajoča (za primer, ko je f padajoča, postopamo podobno ali uporabimo ta dokaz za funkcijo $-f$). Ker je f naraščajoča, je $f(x_1) \leq f(x_2)$ za vse $x_1 < x_2$. Po drugi strani velja $f(x_1) = f(-x_1) \geq f(-x_2) = f(x_2)$, kjer upoštevamo sodost f in $-x_1 > -x_2$. Sklepamo, da je $f(x_1) = f(x_2)$. Ker sta bila $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ poljubna, sklepamo, da je f konstantna.

Naj bosta f in g zvezni funkciji na $\mathbb{R}$, za kateri velja $f(q) = g(q)$ za vse $q \in \mathbb{Q}$. Dokaži, da velja $f(x) = g(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

Vsak $x \in \mathbb{R}$ je limita nekega zaporedja racionalnih števil $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$. Potem velja (upoštevamo zveznost f in g in trditev s predavanj) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = g(x)$.

Dokaži, da obstaja natanko ena nekonstantna zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero velja:

(1) f(x + y) = f(x) + f(y)
(2) f(xy) = f(x)f(y)

Najprej vidimo, da je $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Ker je $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$, sledi $f(1) \in \{0, 1\}$, toda če bi veljalo $f(1) = 0$, bi bil $f(x) = f(1)f(x) = 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$, kar je v nasprotju z dejstvom, da f ni konstantna. Torej je $f(1) = 1$, nakar z indukcijo po n z uporabo lastnosti (1) takoj pokažemo, da je $f(n) = n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Velja tudi $f(-n) = -n$, saj je $0 = f(0) = f(n) + f(-n)$, torej je $f(n))n$ za $n \in \mathbb{Z}$. Pokažimo, da je f identiteta tudi na množici racionalnih števil: $f(1) = f(m)f(\frac{1}{m})$, zato je $f(\frac{1}{m}) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{m}$ za vse $m \neq 0$, torej je $f(\frac{n}{m}) = fracnm$. Torej se f ujema z identiteto na vseh racionalnih številih. Ker je f zvezna, uporabimo sklep iz zgornje naloge in tako končamo dokaz, da je edina nekonstatna zvezna funkcija, ki izpolnjuje zgornja pogoja, enaka identiteti.

Naj bo $f : [0,1] \to [0,1]$ zvezna funkcija. Dokaži, da ima fiksno točko.

Dokazujemo, da obstaja $x \in [0,1]$, da velja $f(x) = x$. Ekvivalentno, dokazujemo, da ima funkcija $g(x) := f(x) - x$, ki je prav tako zvezna, ničlo na $[0,1]$. Ker je $f(1) \leq 1$, je $g(1) \leq 0$ in ker je $f(0) \geq 0$, je $g(0) \geq 0$. Če ima g ničlo v 0 ali 1, je naloge konec. Sicer velja $g(0) > 0$ in $g(1) < 0$, iz česar zaradi zveznosti g sledi, da ima g ničlo na $(0,1)$.

Naj bo $f(x) = \frac{x+1-\sqrt{x+1}}{x}$. Določi asimptote f.

Želimo ugotoviti, kako se f obnaša na robovih definicijskega območja. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} \\ &= 1 + \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x}\end{aligned}$$

Zadnja limita je oblike "$\infty - \infty$", rešujemo z racionalizacijo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{1+\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sklep: $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-\sqrt{x+1}}{x} = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Ali obstaja $\lim_{y\to 0} y(\frac{y+1}{y} - \sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}})$?

$$\lim_{y\to 0} y(\frac{y+1}{y} - \sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}}) = \lim_{y\to 0} y\frac{y+1}{y} - \lim_{y\to 0} y\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}}$$

Prva limita je, jasno, enaka 1, druga pa ne obstaja. Res: če si ogledamo levo in desno limito, bomo videli, da se razlikujeta:

$$\lim_{y\downarrow 0} y\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}} = \lim_{y\downarrow 0} \sqrt{y^2+1} = 1,$$

saj je za pozitivne y $\sqrt{y^2} = y$, toda

$$\lim_{y\uparrow 0} y\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}} = \lim_{y\uparrow 0} -\sqrt{y^2+1} = -1,$$

saj za negativne y velja. $\sqrt{y^2} = -y$.