LINEARNA ALGEBRA 2020/21
9. VAJE: 30. 11. 2020

1. Izračunaj determinanti matrik

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -6 & 10 & 6 \\ 1 & 7 & -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunaj determinato $n \times n$ matrike.

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Izračunaj determinanto

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Najdi rekurzivno zvezo za determinato $n \times n$ matrike.

$$D_n = \det \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a & 1 \\ & & & 1 & a \end{bmatrix}.$$

5. Števila 20604, 53227, 25755, 20927 in 78421 so deljiva s 17. Pokaži, da je spodnja determinanta deljiva s 17.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Izračunaj determinanti $n \times n$ matrik.

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \cdots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Izračunaj spodnji determinanti

$$\det \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n. \end{bmatrix}.$$

1. Izračunaj determinanti

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -6 & 10 & 6 \\ 1 & 7 & -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $\det \nabla$ (zgornje trikotna), $\det \Delta$ (spodnje trikotna) je produkt diagonalnih elementov
- det se ne spreminja če odštejemo večkratnik vrstice (stolpca) od druge vrstice (stolpca)

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} \overset{-1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -5 \\ -7 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4(-3) = -12$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -6 & 10 & 6 \\ 1 & 7 & -9 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \end{vmatrix} = 0$$

2. Izračunaj

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$D_1 = \det[0] = 0$$

$$D_2 = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

$$D_3 = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_4 = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1\cdot 1 \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1\cdot D_2 = 1$$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}. = -1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{-1 \text{ vrstica}} = -1 \det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{(n-2)\times(n-2) \text{ matrika}} = -1\, D_{n-2}$$

$$D_n = -1\, D_{n-2} = (-1)\cdot(-1)\cdot D_{n-4} \dots$$

$$D_{2n+1} = (-1)\, D_{2(n-1)+1} = (-1)^{n-1}\cdot D_3 = 0$$

$$D_{2n} = (-1)^{n-1} D_2 = (-1)^n$$

3. Izračunaj

$$B_5 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$B_1 = \det[2] = 2 \qquad B_2 = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \ddots = 2\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \ddots - 1 \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \ddots$$

$= 2 \cdot B_4 - 1 B_3$ $\qquad B_n = 2 \cdot B_{n-1} - B_{n-2}$

B_1	B_2	$B_3 = 2 \cdot B_2 - B_1 = 6 - 2$	$B_4 = 2 \cdot 4 - 3$
2	3	4	5

$B_5 = 2 \cdot 5 - 4$

6

Ugibamo

B_6	B_n
7	$n+1$

Preverimo z indukcijo

$n=1$ ✓ $\quad B_1 = 1+1$

$n \longrightarrow n+1$ (Predpostavimo, da velja za vsa števila do vključno n)

$$B_{n+1} = 2B_n - B_{n-1} \underset{\text{ind predpostavka}}{=} 2(n+1) - n = 2n+2-n = n+2 = (n+1)+1 \checkmark$$

4. Poišči rekurzivno zvezo

$$C_n = \det \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a & 1 \\ & & & 1 & a \end{bmatrix}.$$

- $C_1 = a$
- $C_2 = a^2 - 1$

$$C_n = a C_{n-1} - C_{n-2}$$

$$\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n-1} \\ C_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n-1} \\ C_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} C_{n-2} \\ C_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n-1} \end{bmatrix}$$

Potenciranje lahko izvedemo v $O(\log(n))$ korakih.

Nastavek za reševanje rekurzivne enačbe

$X_n = a X_{n-1} + b X_{n-2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$ (ali $\mathbb{C}$)

Rešimo enačbo

$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$

λ_1, λ_2 - rešitvi

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\quad X_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
- $\lambda_1 = \lambda_2$: $\quad X_n = (An + B)\lambda_1^n$

A, B določimo iz X_1, X_2 (ali drugače podanih začetnih pogojev)

5. Števila 20604, 53227, 25755, 20927 in 78421 so deljiva s 17. Pokaži, da je spodnja determinanta deljiva s 17.

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ želimo matriko, ki ima v enem stolpcu vse koeficiente deljive s 17

$$20604 = 2\cdot 10^4 + 0\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$$

$$53227 = 5\cdot 10^4 + 3\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0$$

$\vdots$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 20604 \\ 53227 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\text{stolpce}} = 10^4\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ \vdots \end{bmatrix} + 10^3\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \vdots \end{bmatrix} + 10^2\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix} \dots$$

$+10^4$, $+10^3$, $+10^2$, $+10$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 20604 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 53227 \\ & & & & 25755 \\ & & & & 20927 \\ & & & & 78421 \end{bmatrix} = 17\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & * \\ 5 & 3 & 2 & 2 & * \\ & & & & * \\ & & & & \vdots \\ & & & & * \end{bmatrix}$$

iz zadnjega stolpca izpostavimo 17

celo število

$$20604/17 = 1212$$

$$\det[\ ] = 17 \cdot \underset{\text{celo število}}{*} \qquad 17 \mid \det[\ ]$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & x\,a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & x\,a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & x\,a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = x\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6. Izračunaj

Menjave vrstic / stolpcev • če zamenjamo dve vrstici/stolpca se determinanta pomnoži z -1

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \cdots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} a_i \quad , \text{ kjer je } n = 2k+1 \text{ ali } n = 2k$$
$$k = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor$$

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_n & & & \\ & a_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$\det \begin{bmatrix} & & a_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & \end{bmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} & & a_2 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{vmatrix}$$

$$A_n = \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} \quad n \times n \text{ - determinanta}$$

$$A_1 = \det [1] = 1$$

$$A_2 = \det \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} = -1 \qquad 1 \text{ - menjava} \qquad \frac{2}{2}$$

$$A_3 = \det \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = -1 \qquad 1 \text{ - menjava} \qquad \frac{3-1}{2}$$

$$A_4 = \det \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = 1 \qquad 2 \text{ - menjavi}$$

$n = 2k+1$

naredimo k menjav

$1 \longleftrightarrow 2k+1$
$2 \longleftrightarrow 2k$
$3 \longleftrightarrow 2k-1$
$\vdots$
$j \longleftrightarrow 2k+2-j$
$\vdots$
$k \longleftrightarrow k+2$

$k+1$ ostane na mestu

$n = 2k$

k - menjav

$1 \longleftrightarrow 2k$
$2 \longleftrightarrow 2k-1$
$\vdots$
$j \longleftrightarrow 2k+1-j$
$\vdots$
$k \longleftrightarrow k+1$

$$A_{2k+1} = (-1)^k$$
$$A_{2k} = (-1)^k$$

$$\begin{vmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

Vrstni red menjanja vrstic ni pomemben.

$$\begin{bmatrix} & & a_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & \end{bmatrix} = (-1)^n a_n \det \begin{bmatrix} & & a_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_{n-1} & & \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+(n-1)} a_n \cdot a_{n-1} \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} = (-1)^{\sum_{i=1}^{n} i} \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$(-1)^{\sum_{i=1}^{n} i} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$\frac{n(n+1)}{2}$ ima isto parnost kot $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \; 0 & 0 \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

7. Izračunaj

$$\det \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} x_i \det \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \Big\{$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i y_i \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1 \cdot y_1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

$n \times n$ matrika

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

ta matrika je obrnljiva $\iff$ $n = 1$ in $x_1 y_1 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n. \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \cdots & (x_2-x_1)y_n \\ \vdots & & & \\ (x_n-x_1)y_1 & \cdots & & (x_n-x_1)y_n \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\det\begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & & 1+x_1y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \overset{-1}{=} \begin{cases} 1+x_1y_1 & ; n=1 \\ (x_2-x_1)(y_2-y_1) & ; n=2 \\ 0 & ; n\geq 3 \end{cases}$$

če je $n\geq 3$ lahko 2. vrstico odštejemo od 3.

$n=2$ $\quad$ $n=1$ ✓

$$n=2 \qquad (x_2-x_1)\det\begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \overset{-x_1}{=} (x_2-x_1)\det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$(x_2-x_1)(y_2-y_1)$$